Die infinitesimale Deformation der abwickelbaren und Regelflächen

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt der

philosophischen Fakultät II. Sektion

der

Ludwig-Maximilians-Universität zu München

im März 1912

von **Aloys Wenzl**

München 1913

Druck von Zankl & Stahl, München-Ost, Wörthstraße 35

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548312_0182

Die infinitesimale Deformation der abwickelbaren und Regelflächen

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt der

philosophischen Fakultät II. Sektion

der

Ludwig-Maximilians-Universität zu München

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

im März 1912

von **Aloys Wenzl**

München 1913

Druck von Zankl & Stahl, München-Ost, Wörthstraße 35

Tag der mündlichen Prüfung: 20. Dezember 1912.

Einleitung

Das Längenelement einer Fläche mit den Koordinaten x, y, z wird durch die Transformation

$$\xi = x + \epsilon\bar{x}, \quad \eta = y + \epsilon\bar{y}, \quad \zeta = z + \epsilon\bar{z},$$

in der ϵ eine unendlich kleine Konſtante bedeutet, nur um unendlich kleine Größen zweiter Ordnung geändert, wenn die Differentialgleichung

$$dx\,d\bar{x} + dy\,d\bar{y} + dz\,d\bar{z} = 0$$

erfüllt iſt. Die gegebene Fläche wird dann durch die Transformation „infinitesimal deformiert“. Dieſelbe Differentialgleichung drückt bekanntlich aus, daß ſich die Flächen mit den Koordinaten x, y, z und $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ durch Orthogonalität ihrer Längenelemente entſprechen. Bei ſeinen zahlreichen intereſſanten Zuſammenhängen mit verſchiedenen Gebieten der Theorie der Flächen und Strahlenſyſteme ist das Problem der infinitesimalen Deformation wiederholt Gegenſtand eingehender Behandlung geweſen. So weiſt auch die Literatur eine Anzahl von Löſungsmethoden auf; die ſehr verſchiedenen Anſätze, von denen ausgegangen wird, zeigen, daß die Beſtimmung der infinitesimalen Deformation einer Fläche von der Löſung einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung abhängt. Beſondere Behandlung haben wiederholt die Minimal- und die Regelflächen gefunden. Für letztere läßt ſich das Problem der infinitesimalen Deformation bis auf Quadraturen löſen, wenn ſie auf ihre Haupttangentenkurven bezogen ſind. Für eine vorgegebene Fläche aber führt die Anwendung dieſer Methoden in der Regel nicht zu expliciten Koordinaten der durch Orthogonalität der Elemente entſprechenden Flächen.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist nun für die gradlinigen Flächen[1]) die infinitesimalen Deformationen explicite aufzustellen und die an die Lösung zu knüpfenden Betrachtungen, soweit als möglich, auszuführen.

Die Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich Herrn Geheimrat Dr. A. Voß, dem ich auch für zahlreiche Ratschläge und die Förderung, die er derselben stets zuteil werden ließ, zu großem Danke verpflichtet bin.

[1]) Die abwickelbaren Flächen sind bei den meisten Autoren unberücksichtigt geblieben, da in der Regel vorausgesetzt wird, daß das Krümmungsmaß der zu deformierenden Fläche von Null verschieden ist; doch dürfte auch die Behandlung dieser Flächen nicht ohne Interesse sein, da gerade bei ihnen der Unterschied zwischen endlichen und unendlich kleinen Deformationen sehr einleuchtend hervortritt.

I. Teil.

Bestimmung der infinitesimalen Deformation der abwickelbaren und Regelflächen.

§ 1.

Methoden zur Bestimmung der infinitesimalen Deformation einer allgemeinen gegebenen Fläche.

Es erscheint zweckmäßig hier zunächst eine kurze Übersicht über die zum Teil untereinander verwandten Methoden zur Lösung des Problems der infinitesimalen Deformation zu geben, um im folgenden nach Bedarf darauf Bezug nehmen zu können.

I. Lösung durch die Weingartensche Gleichung[1])

a) Ersetzt man die Grundgleichung des Problems $dx\,d\bar{x} + dy\,d\bar{y} + dz\,d\bar{z} = 0$, in der x, y, z die Koordinaten der gegebenen Fläche S, $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ diejenigen der Fläche $\bar{S}$, welche der ersteren durch Orthogonalität der Elemente zugeordnet ist, bedeuten, durch die drei Gleichungen[2])

$$\Sigma\, x_u\, \bar{x}_u = 0,\quad \Sigma\, x_v\, \bar{x}_v = 0,\quad \Sigma\, x_u\, \bar{x}_v + \Sigma\, x_v\, \bar{x}_u = 0\ ^{3}),$$

[1]) Weingarten, Crelles Journal, Bd. 100, S. 296.

[2]) Die Flächen seien auf Parameterkurven u und v bezogen, die unteren Indices, u und v, sollen die Differentiation nach dem betreffenden Parameter andeuten: $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$, $x_{uv} = \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}$. Das Σ-Zeichen bezieht sich stets auf die drei rechtwinkligen Koordinaten.

[3]) Diese drei Gleichungen werden im folgenden als die Fundamental- oder Grundgleichungen des Problems bezeichnet.

und zerlegt die letztere in

$$\Sigma\, x_u\, \bar{x}_v = \varphi \sqrt{EG - F^2}\ ^{1})$$
$$\Sigma\, x_u\, \bar{x}_v = -\varphi \sqrt{EG - F^2},$$

wo $\varphi = \frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}} \cdot \left(\Sigma\, x_u\, \bar{x}_v - \Sigma\, x_v\, \bar{x}_u\right)$ die charakteristische Funktion der infinitesimalen Deformation heißen möge, so sind die Koordinaten der Fläche $\bar{S}$ gegeben durch

$$\bar{x}_u = \frac{D\,(\varphi\, X_v - X\,\varphi_v) - D'\,(\varphi\, X_u - X\,\varphi_u)\ ^{1})}{K\sqrt{EG - F^2}}$$

$$\bar{x}_v = \frac{D'\,(\varphi\, X_v - X\,\varphi_v) - D''\,(\varphi\, X_u - X\,\varphi_u)}{K\sqrt{EG - F^2}}$$

und durch analoge Ausdrücke für die Differentialquotienten von $\bar{y}$ und $\bar{z}$, wenn φ der Weingartenschen Gleichung genügt:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''\,\varphi_u - D'\,\varphi_v}{K\sqrt{EG - F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D\,\varphi_v - D'\,\varphi_u}{K\sqrt{EG - F^2}}\right) = H.\,\varphi\sqrt{EG - F^2}$$

Durch Einführung der sphärischen Abbildung kann nach Bianchi diese „charakteristische“ Gleichung auf folgende Normalformen gebracht werden: [2])

$$1)\quad \varphi_{uu} + \varphi_{vv} = L\,\varphi,$$

wenn die Fläche auf ein isotherm-konjungiertes System,

$$2)\quad \varphi_{uv} = M\,\varphi,$$

wenn sie auf ihre Haupttangentenkurven bezogen ist.

b) In einer besonders eleganten Weise hat Darboux[3]) durch Verwendung der Lelieuvreschen Formeln, durch die die Fläche

[1]) E, F, G sind die Koëffizienten des Quadrats des Längenelements $ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$, X, Y, Z die Richtungskosinus der Flächennormale, D, D′, D″ die Koëffizienten der 2. Grundform $\Sigma\,dx\,dX = D\,du^2 + 2\,D'\,du\,dv + D''\,dv^2$; unter K ist die totale, unter H die mittlere Krümmung zu verstehen.

[2]) Bianchi, Diff.-Geom. S. 295

[3]) Darboux, Théorie des surfaces, Bd. IV, S. 48.

auf ihre Haupttangentenkurven bezogen wird, die Löſung des Problems auf die Löſung der zuletzt genannten Normalform der Weingartenſchen Gleichung zurückgeführt. Sind nämlich die Koordinaten der Fläche S gegeben in der Form

$$\Sigma a x = \int (a \mathfrak{Y} \mathfrak{Y}_u)\, du - \int (a \mathfrak{Y} \mathfrak{Y}_v)\, dv,^{1})$$

wo a_1, a_2, a_3 beliebige Konſtante, deren Koëffizienten rechts und links gleichzuſetzen ſind, und Θ_1, Θ_2, Θ_3 partikuläre Löſungen der Gleichung

$$\mathfrak{Y}_{uv} = M(u, v).\, \mathfrak{Y}$$

ſind, ſo lauten die Koordinaten der allgemeinſten ihre durch Orthogonalität der Elemente entſprechenden Fläche $\bar{S}$.

$$\bar{x}_i = \int \begin{vmatrix} \mathfrak{Y}_i & \omega \\ \mathfrak{Y}_u^i & \omega_u \end{vmatrix} du - \int \begin{vmatrix} \mathfrak{Y}_i & \omega \\ \mathfrak{Y}_v^i & \omega_v \end{vmatrix} dv, \text{ für } i = 1, 2, 3,$$

wenn unter ω die allgemeinſte Löſung der Gleichung $\mathfrak{Y}_{uv} = M \mathfrak{Y}$ verſtanden wird.

c) Eine Normalform der Weingartenſchen Differentialgleichung für allgemeine Koordinaten ergibt ſich, wenn die Fläche S als ſogenannte adjungierte Fläche gegeben iſt. Iſt nämlich eine Fläche gegeben durch die Koordination Θ_1, Θ_2, Θ_3, ſo iſt die zu ihr adjungierte Fläche S definiert durch die Koordinaten[2])

$$1)\ \Sigma a x = \int (a \Theta \Theta_u)(D_1\, du + D_{11}\, dv) - \int (a \Theta \Theta_v)(D du + D_1 dv),$$

wobei dieſelben wieder in der nämlichen Weiſe zuſammengefaßt ſind wie im vorigen Abſchnitt b). Die Integrabilitätsbedingungen ſind erfüllt, wenn die Funktionen Θ_1, Θ_2, Θ_3 bezw. D, D_1, D_{11} den drei Differentialgleichungen genügen:

$$2)\ \frac{\partial}{\partial u}(D_{11}\ \Theta_u^i - D_1\, \Theta_v^i) + \frac{\partial}{\partial v}(D\, \Theta_v^i - D_1\, \Theta_u^i) = M \Theta \Big| i = 1, 2, 3$$

[1]) Dreireihigen Determinanten ſeien ſtets abgekürzt geſchrieben;

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a\ b\ c)$$

[2]) Darboux, Théorie des surfaces, Bd. IV, S. 44 und 45.

Nun läßt ſich zeigen[1]), daß bei Subſtitution der Θ durch $\frac{\Theta}{\lambda}$ und der D durch $\lambda^2 D$ die Koordinaten der Fläche S unverändert bleiben, die Gleichungen 2) dagegen durch geeignete Wahl der Funktion λ ſtets auf eine Normalform gebracht werden können, in der $M = o$ iſt, ſodaß alſo immer die rechte Seite von vornherein gleich null angenommen werden kann.

Die Koordinaten einer der Fläche S durch Orthogonalität der Elemente entſprechenden Fläche $(\bar{S})$ ſind dann gegeben durch

$$3) \quad \begin{aligned} (\bar{x}_u^i) &= D_1\ \Theta_u^i - D\ \Theta_v^i \\ (\bar{x}_v^i) &= D_{11}\ \Theta_u^i - D_1\ \Theta_v^i; \end{aligned}$$

die charakteriſtiſche Funktion dieſer infinitesimalen Deformation iſt $\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{\Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \Theta_3^2}}$. Die allgemeine Fläche $\bar{S}$ hat die Koordinaten

$$4) \quad \begin{aligned} \bar{x}_u^i &= (\rho_u D_1 - \rho_v D) \cdot \Theta_i - \rho\ (D_1\ \Theta_u^i - D\ \Theta_v^i) \\ \bar{x}_v^i &= (\rho_u D_{11} - \rho_v D_1) \cdot \Theta_i - \rho\ (D_{11}\ \Theta_u^i - D_1\ \Theta_v^i), \end{aligned}$$

die zugehörige charakteriſtiſche Funktion lautet $\frac{\rho}{r}$, wo ρ die allgemeine Löſung der Differentialgleichung

$$5) \quad \frac{\partial}{\partial u}(\rho_u D_1 - \rho_v D_1) + \frac{\partial}{\partial v}(\rho_v D - \rho_u D_1) = 0$$

iſt. Dieſe Normalform der charakteriſtiſchen Gleichung entſpricht bei der gewählten Koordinatendarſtellung der Fläche S genau der urſprünglichen Weingartenſchen Gleichung.

Dieſe Methoden gehen lediglich von verſchiedener Koordinatendarſtellung der Fläche S aus, haben aber gemeinſam, daß nach Löſung der Weingartenſchen Gleichung oder einer für die gewählte Darſtellung ihr entſprechenden $\bar{x}_u$, $\bar{x}_v$ uſw. ſich beſtimmen laſſen; ihnen reihen ſich nun folgende andere Anſätze an.

---

[1]) Voß, „Infinitesimale Biegungsdeformationen“, Sitzungsbericht der Münchener Akademie 1897, S. 256.

II. Beſtimmung der zweiten Grundform der infinitesimal deformierten Fläche.[1])

Während E, F, G durch die infinitesimale Deformation nicht verändert werden, erhalten die Fundamentalgrößen zweiter Art, D, D′, D″ gewiſſe Inkremente δD, $\delta D'$, $\delta D''$.

Setzt man

$$\delta D = \epsilon d,\ \delta D' = \epsilon d',\ \delta D'' = \epsilon d'',$$

unter ϵ eine unendlich kleine Konſtante verſtanden, ſo beſtimmen ſich d, d′ und d″ durch Variation der Gaußiſchen und der Codazziſchen Gleichungen:

$$D'' d - 2 D' d' + D d'' = 0$$

$$d_v - d'_u - \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & \end{matrix} \right\} d + \left(\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{matrix} \right\} \right) d' + \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{matrix} \right\} d'' = 0\ ^{2})$$

$$d''_u - d'_v - \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{matrix} \right\} d + \left(\left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 2 & \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & \end{matrix} \right\} \right) d' + \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{matrix} \right\} d'' = 0$$

Dieſe Gleichungen vereinfachen ſich ſehr, wenn die Fläche auf ihre Haupttangentenkurven bezogen iſt, da dann $D = D'' = 0$, alſo $d' = 0$ wird.

Sind nun d, d′, d″ ermittelt, ſo ſind zunächſt, wie ſich leicht betätigen läßt, die Koordinaten der zur Ausgangsfläche S aſſoziierten Fläche S_0 gegeben durch ihre Differentialquotienten

$$x_{0u} = \frac{d'}{\sqrt{EG - F^2}} x_u - \frac{d}{\sqrt{EG - F^2}} x_v$$

$$x_{0v} = \frac{d''}{\sqrt{EG - F^2}} x_u - \frac{d'}{\sqrt{EG - F^2}} x_v \text{ etc.}$$

und die charakteriſtiſche Funktion $\varphi = \Sigma X x_0$; durch ſie können nach der erſten Methode die Koordinaten der Fläche $\bar{S}$ gefunden werden, die der Ausgangsfläche durch Orthogonalität der Elemente entſpricht.

[1]) Bianchi, Diff.-Geom., S. 307.

[2]) Die Ausdrücke $\left\{ \begin{matrix} a & b \\ c & \end{matrix} \right\}$ bedeuten die Chriſtoffelſchen Symbole 2. Art.

III. Löſung, wenn die Fläche S in der Form $z = f(x, y)$ gegeben iſt.[1])

Iſt die Fläche S gegeben in der Form $z = f(x, y)$ und die Fläche $\bar{S}$ geſucht in der Form $\bar{z} = \varphi(x, y)$, ſo läuft die Löſung des Problems, ausgehend von dem Anſatz

$$\begin{aligned} d\bar{x} &= c\,dy - b\,dz \\ d\bar{y} &= a\,dz - c\,dx \\ dz &= b\,dx - a\,dy, \end{aligned}$$

in dem unter a, b, c drei zu beſtimmende Funktionen von x, y, z zu verſtehen ſind, ſchließlich auf die Integration der Gleichung

$$\bar{r}\bar{t} + r\bar{t} - s\bar{s} = 0$$

hinaus, wo r, s, t die üblichen Abkürzungen für die zweiten partiellen Ableitungen von z und $\bar{r}$, $\bar{s}$, $\bar{t}$ die analogen von $\bar{z}$ bedeuten.

IV. Zwei Methoden zur direkten Beſtimmung von $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$.

a) Statt der Differentialquotienten x_u, x_v uſw. beſtimmt man $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ ſelbſt, indem man ausgeht von dem Anſatz[2]):

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \lambda x_u + \mu x_v + \nu X \\ \bar{y} &= \lambda y_u + \mu y_v + \nu Y \\ \bar{z} &= \lambda z_u + \mu z_v + \nu Z \end{aligned}$$

Die Hilfsfunktionen λ, μ, ν ergeben ſich aus einem Syſtem von 6 unbeſchränkt integrablen Differentialgleichungen, wenn vorher eine Differentialgleichung zweiter Ordnung gelöſt iſt, die für die „infiniteſimale Iſometrie“, den im folgenden ſtets zu betrachtenden Fall, genau die Weingartenſche Gleichung für die charakteriſtiſche Funktion darſtellt. Inſofern beſteht ein ſehr naher Zuſammenhang dieſer mit den unter I. genannten Methoden.

[1]) Darboux, Théorie des surfaces. Bd. IV, S. 10.

[2]) Voß, „Beiträge zur Theorie der unendlich kleinen Deformationen einer Fläche“, Sitzungs-Bericht der Münchener Akademie. 1904, S. 178.

Doch wird die Beſtimmung der charakteriſtiſchen Funktion vermieden, wenn die Fläche auf ihre Haupttangentenkurven bezogen iſt und als Hilfsgrößen

$$\Sigma \bar{x}\, x_u = \rho = \lambda E + \mu F, \quad \Sigma \bar{x}\, x_v = \sigma = \lambda F + \mu G$$
$$\Sigma \bar{x}\, X = \nu$$

eingeführt werden. ρ, σ und ν ſind dann proportional den Projektionen des Verſchiebungsvektors $\bar{r} = (\epsilon\bar{x}, \epsilon\bar{y}, \epsilon\bar{z})$ auf die Flächennormale und die Tangenten der Kurven u und v. Sie ergeben ſich aus den Gleichungen:

$$\rho_u - \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{matrix} \right\} \rho - \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{matrix} \right\} \sigma = 0$$

$$\sigma_v - \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & \end{matrix} \right\} \rho - \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 2 & \end{matrix} \right\} \sigma = 0$$

$$\rho_v \quad \sigma_u \quad 2 \left(\rho \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & \end{matrix} \right\} + \sigma \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{matrix} \right\} \right) = 2\, D'\nu$$

b) Von den beiden Größen $\Sigma \bar{x} x_u$ und $\Sigma \bar{x} x_v$ geht auch Demoulin[1]) aus. Bezeichnet man wieder

$$1)\ \Sigma \bar{x}\, x_u = \rho, \qquad 2)\ \Sigma \bar{x}\, x_v = \sigma,$$

dann erhält man durch Differentiation unter Berückſichtigung der drei Fundamentalgleichungen des Problems noch die folgenden Gleichungen:

$$3)\ \Sigma \bar{x}\, x_{uu} = \rho_u \qquad 4)\ \Sigma \bar{x}\, x_{vv} = \sigma_v,$$

$$5)\ \Sigma \bar{x}\, x_{uv} = \frac{\rho_v + \sigma_u}{2}$$

Durch Elimination von $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ erhält man zwei Gleichungen mit ρ, σ und deren erſten Differentialquotienten; durch Elimination von σ aus dieſen beiden Gleichungen ergibt ſich eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für ρ.

[1]) Alphonse Demoulin, „Sur la correspondance par orthogonalité des élements“, Comptes rendus de l'Académie des sciences, Bd. 116, 1893, S. 682.

§ 2.

Die abwickelbaren Flächen.

Für die infinitesimale Deformation der abwickelbaren Flächen versagen von den angeführten Methoden diejenigen, die voraussetzen, daß die Fläche S auf Haupttangentenkurven bezogen sei, ebenso die Methode Ia, da hier $K = 0$.

Dagegen gibt die mit Ic bezeichnete Methode eine Lösung auf folgendem Wege: Man wählt Θ_i als die Koordinaten einer abwickelbaren Fläche und bildet zu der im vorigen Paragraphen mit $(\bar{S})$ bezeichneten Fläche die adjungierte Fläche; diese entspricht dann der abwickelbaren Fläche mit den Koordinaten Θ_i durch Orthogonalität der Elemente[1]); ihre Koordinaten lauten:

$$\Sigma a \Theta_i = \int \left(a\ (\bar{x})\ (\bar{x}_u) \right) (d_1\ du + d_{11}\ dv)$$

$$- \int \left(a\ (\bar{x})\ (\bar{x}_v) \right) (d\ du + d_1\ dv),$$

wo die Funktionen d, d_1, d_{11} gleich den mit $DD_{11} - D_1^2$ dividierten Größen D, D_1, D_{11} sind.

Auch die unter II und IVb angeführten Methoden würden die Koordinaten der einer abwickelbaren Fläche durch Orthogonalität der Elemente entsprechenden Fläche liefern.

Endlich sei noch vorausgeschickt, daß in der Seite 5 zitierten Arbeit von Weingarten ein Weg zur Bestimmung der charakteristischen Funktion auch für diesen Fall angegeben ist. Differenziert man nämlich $\varphi \mid EG - F^2 \quad \Sigma x_u \bar{x}_v$ nach u und v und setzt man die bekannten Formeln für die zweiten Ableitungen ein:

$$x_{uu} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & \end{matrix} \right\} x_u + \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{matrix} \right\} x_v + D\,X \text{ etc.},$$

so erhält man

$$\varphi_u = \frac{D \Sigma X \bar{x}_v - D' \Sigma X \bar{x}_u}{\sqrt{EG - F^2}},\quad \varphi_v = \frac{D'' \Sigma X \bar{x}_u - D' \Sigma X \bar{x}_v}{\sqrt{EG - F^2}};$$

[1]) Das läßt sich ohne weiteres bestätigen, wenn man für die $(\bar{x})$ ihre aus dem vorigen Paragraphen ersichtlichen Werte einsetzt.

hieraus ergibt ſich für $K = 0$

$$D'' \varphi_u - D' \varphi_v = 0 \text{ [1]}$$

Weiter iſt der Fall bei Weingarten nicht verfolgt, vielmehr die Beſtimmung der infinitesimalen Deformationen der abwickelbaren Flächen ausdrücklich ausgeſchloſſen.

Dagegen hat, auf dieſer Beſtimmung der charakteriſtiſchen Funktion aufbauend, Herr Geheimrat Voß die infinitesimale Deformation der auf ihre Erzeugenden und deren Orthogonaltrajektorien bezogenen abwickelbaren Fläche weiterbehandelt in der Seite 11 zitierten Arbeit.

Am raſcheſten dürfte hier zu überſichtlichen Formeln für die Koordination von $\bar{S}$, mit denen ſich dann einfach weiter operieren läßt, der direkte Anſatz führen, das heißt, die Aufſtellung der drei beziehungsweiſe vier Grundgleichungen und der Integrabilitätsbedingungen. Es ſeien im folgenden die Hauptformen der abwickelbaren Fläche einzeln behandelt.

I. Der Zylinder. [2])

Sind die Koordinaten des Zylinders in der Form

$$x = V_1, \quad y = V_2, \quad z = u$$

gegeben, wo V_1 und V_2 Funktionen des Parameters v allein ſeien, [3]) während u die andere unabhängige Variable iſt, ſo lauten die drei Bedingungsgleichungen des Problems:

1) $\Sigma\, x\, \bar{x}_u = \bar{z}_u = 0$, das heißt $\bar{z} = F(v)$

2) $\Sigma\, x_v\, \bar{x}_v \quad V'_1\, \bar{x}_v \quad V'_2\, \bar{y}_v \quad 0$ [1])

3) $\Sigma\,(x_u\, \bar{x}_v + x_v\, \bar{x}_u) = V'_1\, \bar{x}_u + V'_2\, \bar{y}_u + F' = 0.$

[1]) Ebenſo ergibt ſich $D' \varphi_u - D \varphi_v = 0$

[2]) Die infinitesimale Deformation der Ebene behandelt Darboux, Théorie des surfaces, Bd. IV, S. 87.

[3]) Die Funktionen ſind ſtets endlich und ſtetig vorausgeſetzt, ebenſo ihre 1., 2. und 3. Differentialquotienten.

[4]) Die Ableitungen von Funktionen einer einzigen Variabeln ſeien durch oben angefügte Striche bezeichnet, ſodaß alſo $V' = \frac{dV}{dv}$, $V'' = \frac{dV'}{dv}$ etc.

Differenziert man 2) nach u und 3) nach v, ſo erhält man vermöge der Integrabilitätsbedingungen:

$$4)\quad V_1'' \bar{x}_u + V_2'' \bar{y}_u + F'' = 0$$

Aus 3) und 4) folgt nun

$$\bar{x}_u = -\frac{\begin{vmatrix} F' & V'_2 \\ F'' & V''_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} V'_1 & V'_2 \\ V''_1 & V''_2 \end{vmatrix}},\quad \bar{y}_u = -\frac{\begin{vmatrix} V'_1 & F' \\ V''_1 & F'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} V'_1 & V'_2 \\ V''_1 & V''_2 \end{vmatrix}}$$

Bezeichnet man dieſe nur von v abhängigen Ausdrücke zur Abkürzung mit $-A_1$ beziehungsweiſe $-A_2$ und integriert nach u, ſo ergibt ſich ſchließlich für die geſuchten Koordinaten:

$$\text{(I)}\quad \begin{aligned} \bar{x} &= W_1(v) - u A_1 \\ \bar{y} &= W_2(v) - u A_2 \\ \bar{z} &= F \end{aligned}$$

Die Funktionen W ſind dabei in ihrer Willkürlichkeit beſchränkt durch die aus 2) ſich ergebende Relation

$$V'_1 W'_1 + V'_2 W'_2 = 0;\ \text{alſo}$$

$$W_1 = \int \lambda V'_2\, dv + c_1,\ W_2 = -\int \lambda V'_1\, dv + c_2,$$

wo λ eine willkürliche Funktion von v iſt.

Für das Folgende iſt zu beachten, daß

$$\text{(II)}\quad \begin{aligned} V'_1 A_1 + V'_2 A_2 &= F' \\ V''_1 A_1 + V''_2 A_2 &= F'', \text{ alſo} \\ V'_1 A'_1 + V'_2 A'_2 &= 0 \text{ iſt.} \end{aligned}$$

Die Koordinaten der deformierten Fläche ſelbſt werden:

$$\text{(III)}\quad \begin{aligned} \xi &= x + \epsilon \bar{x} = V_1 + \epsilon W_1 - u \epsilon A_1 \\ \eta &= y + \epsilon \bar{y} = V_2 + \epsilon W_2 - u \epsilon A_2 \\ \zeta &= z + \epsilon \bar{z} = \epsilon F + u. \end{aligned}$$

[1]) Die Determinante im Nenner verſchwindet nur, wenn zwiſchen V_1 und V_2 eine lineare Beziehung beſteht, dann reduziert ſich der Zylinder auf eine Ebene.

Aus (I) und (III) ergibt ſich der Satz:

Dem Zylinder entſpricht durch Orthogonalität der Elemente eine Regelfläche mit Leitebene, die zu der Achſenrichtung des Zylinders ſenkrecht ſteht.

Aus dem Zylinder wird durch die infinitesimale Deformation ebenfalls eine Regelfläche.

Zur Beſtimmung der Striktionslinie der Regelfläche (III) bedienen wir uns der folgenden Betrachtung: Bezeichnet $d\sigma$ das Längenelement einer Raumkurve, von deſſen Endpunkten zwei Gerade mit den Richtungskoſinus X, Y, Z bezw. $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$ ausgehen, ſind ferner a, b, c die Richtungskoſinus des kürzeſten Abſtands dp derſelben, und endlich r beziehungsweiſe $r + \partial r$ deſſen Entfernungen von den Endpunkten von $d\sigma$, gemeſſen auf den beiden Geraden, ſo ergeben ſich durch Projektion des geſchloſſenen Vierſeits $(d\sigma, r, dp, r + \partial r)$ auf die drei Koordinatenachſen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} d\xi + X\,\partial r + r\,dX - a\,dp &= 0 \\ d\eta + Y\,\partial r + r\,dY - b\,dp &= 0 \\ d\zeta + Z\,\partial r + r\,dZ - c\,dp &= 0 \end{aligned}$$

Multipliziert man ſie der Reihe nach mit dX, dY, dZ und addiert, ſo erhält man

$$\text{(IV)} \quad \Sigma\, d\xi\, dX + r\,\Sigma\, dX^2 = 0$$

Verſtehen wir nun hier unter $d\sigma$ ein Längenelement der Leitkurve der Regelfläche (III)

$$\xi = V_1 + \epsilon W_1,\ \eta = V_2 + \epsilon W_2,\ \zeta = \epsilon F,$$

unter X, Y, Z beziehungsweiſe $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$ die Richtungskoſinus zweier konſekutiver Erzeugender derſelben

$$X = -\rho\epsilon\, A_1,\ Y = -\rho\epsilon\, A_2,\ Z = \rho,$$

wo $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 (A_1^2 + A_2^2)}}$, und ſchreiben wir an Stelle von r

den Parameter u, ſo wird Gleichung (IV)

$$0 = \rho\,[-\epsilon A'_1 (V'_1 + \epsilon W'_1) - \epsilon A'_2 (V'_2 + \epsilon W'_2)]$$
$$+ \rho'\,[-\epsilon A_1 (V'_1 + \epsilon W'_1) - \epsilon A_2 (V'_2 + \epsilon W'_2) + \epsilon F']$$
$$+ u\,[\rho^2 \epsilon^2 (A'^2_1 + A'^2_2) + \rho'^2 (\epsilon^2 A_1^2 + \epsilon^2 A_2^2 + 1)$$
$$- 2\,\rho\rho' \epsilon (A_1 A'_1 + A_2 A'_2)]$$

Berückſichtigt man die Relationen (II) und beachtet daß ρ' unendlich klein von der 2. Ordnung wird, ſo ergibt ſich unter Vernachläſſigung der Glieder, die von höherer als der 2. Ordnung unendlich klein werden:

$$0 = -\rho (A'_1 W'_1 + A'_2 W'_2) = u\,\rho^2 (A'^2_1 + A'^2_2)$$

$$\text{oder } u = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{A'_1 W'_1 + A'_2 W'_2}{A'^2_1 + A'^2_2}.$$

Setzt man für W_1 und W_2 die gefundenen Werte ein, ſo wird

$$u = \frac{\lambda}{\rho} \cdot \frac{A'_1 V'_2 - A'_2 V'_1}{A'^2_1 + A'^2_2}.$$

Dieſer Ausdruck wird gleich null: 1. Wenn $\lambda = 0$ iſt. Für dieſen Fall wird $\bar{S}$ ein gerades Conoid, die Regelfläche (III) indeſſen bleibt allgemein; 2) wenn $A'_1 = \mu V'_1$, $A_2 = \mu V'_2$. In dieſem Fall wird der Zylinder S durch die infinitesimale Deformation eine abwickelbare Fläche, da hier D' eine unendlich kleine Größe 2. Ordnung würde und ſolche bei dieſem Problem vernachläſſigt werden.

Da im letzteren Fall von keiner Striktionslinie mehr geſprochen werden kann, ergibt ſich, daß nur für den ſpeziellen Fall, daß $\lambda = 0$, alſo $\bar{S}$ ein gerades Conoid iſt, die Leitkurve der Regelfläche (III) zugleich ihre Striktionslinie bildet.

Doch kann durch geeignete Wahl von λ

$$\lambda = c.\,\rho.\,\frac{A'^2_1 + A'^2_2}{A'_1 V'_2 - A'_2 V'_1}$$

bewirkt werden, daß jeder Schnitt des Zylinders mit einer zur xy-Ebene parallelen Ebene u conſt. zur Striktionslinie der durch die infinitesimale Deformation entſtandene Regelfläche werden kann.

Andererſeits nun iſt jede Kurve u conſt. eine Orthogonaltrajektorie der Erzeugenden der Regelfläche (III); denn die Winkel bleiben ja bei der infinitesimalen Deformation erhalten; in der Tat iſt die Bedingung für Orthogonaltrajektorien $\Sigma X \delta\xi = 0$, die hier für $u = u_0$:

$$(V'_1 + \epsilon W'_1 - \epsilon u_0 A'_1) \cdot \epsilon A_1 + (V'_2 + \epsilon W'_2 - \epsilon u_0 A'_2) \cdot \epsilon A_2 - \epsilon F' = 0$$

lautet, unter Berückſichtigung der Relationen (II) und unter Vernachläſſigung der unendlich kleinen Glieder 2. Ordnung erfüllt.

Nun hat nach einem Satz O. Bonnets[1]) eine Kurve auf einer Regelfläche, die von den drei Eigenſchaften: Striktionslinie, Orthogonaltrajektorie der Erzeugenden und geodätiſche Linie zu ſein, zwei beſitzt, auch die dritte Eigenſchaft. Es gilt alſo der Satz:

> Der Schnitt des Zylinders mit der xy-Ebene wird bei der infinitesimalen Deformation zur Leitlinie der dadurch entſtehenden Regelfläche. Durch geeignete Wahl der willkürlichen Funktion λ kann erreicht werden, daß ſowohl dieſe Kurve $u = 0$, wie auch jede andere $u = \text{conſt.}$ zur Striktionslinie, Orthogonaltrajektorie der Erzeugenden und geodätiſchen Linie der Fläche (III) wird.

Wird ſpeziell $\lambda = 0$, ſomit $W_1 = c_1$, $W_2 = c_2$, ſo iſt, wie ſchon erwähnt, die dem Zylinder durch Orthogonalität der Elemente entſprechende Fläche ein gerades Conoid; dem Schnitt des Zylinders mit der xy-Ebene entſpricht die Z-Achſe. Iſt insbeſondere $V_1 = v$, $V_2 = V$, $F = -vV' + V$, ſo erſcheint dasſelbe auf ſeine Haupttangentenkurven bezogen. Iſt dann

[1]) O. Bonnet, „Mémoires sur les surfaces applicables“, Journal de l Ecole Polytechnique, 41. Heft.

der Zylinder ein Kreiszylinder, ſo wird das auf ſeine Hauptkurven bezogene Conoid eine Minimalſchraubenregelfläche, was ſich ſpäter bei der ausführlichen Behandlung dieſer Fläche beſonders einfach zeigen laſſen wird.[1])

Die charakteriſtiſche Funktion, die ſich beim Zylinder zur Beſtimmung der infiniteſimalen Deformation als gar nicht notwendig erwies, lautet:

$$\varphi = \frac{\Sigma\, x_u\, \bar{x}_v}{\sqrt{EG - F_2}} = \frac{F'}{\sqrt{V'^2_1 + V'^2_2}}$$

Es ſei hier, um Wiederholungen zu vermeiden, der für alle abwickelbaren Flächen gültige Satz vorweggenommen:

> Die charakteriſtiſche Funktion für abwickelbare Flächen iſt nur von der Variabeln v abhängig[2]); ſie kann durch geeignete Wahl der willkürlichen Funktion konſtant gemacht werden.[3])

Um beim Zylinder φ konſtant werden zu laſſen, brauchen wir nur zu ſetzen

$$F' = c\sqrt{V'^2_1 + V'^2_2}$$

Die Fläche $\bar{S}$ hat dann die Koordinaten:

$$\bar{x} = W_1 - u\,\frac{c\,V'_1}{\sqrt{V'^2_1 + V'^2_1}} \qquad \bar{y} = W_2 - u\,\frac{c\,V'_2}{\sqrt{V'^2_1 + V'^2_2}}$$

$$\bar{z} = c\int \sqrt{V'^2_1 + V'^2_2}\, dv + c_1$$

[1]) Das geht auch hervor aus der S. 13 angeführten, von Weingarten entwickelten Gleichung für die charakteriſtiſche Funktion einer abwickelbaren Fläche: $D''\,\varphi_u - D'\,\varphi_v = 0$.

[2]) Vergleiche S. 61.

[3]) Aus der Weingartenſchen Gleichung ergibt ſich die gleiche Eigenſchaft nur noch für die Minimalflächen; ſo heißt es in einer Arbeit von Eiſenhart: „Infiniteſimal deformation of surfaces", Americ. Journal of mathematics, Bd. 24, S. 192, wo die abwickelbaren Flächen nicht in Betracht gezogen ſind: From the form of the charakteriſtic equation, it is readily seen, that only in the case, where S is a Minimal surface, can the charakteriſtic function φ be a constant.

Das ist eine auf ihre Erzeugenden und deren Orthogonaltrajektorien bezogene Regelfläche.

II. Der Kegel.

Es sei der Kegel als Fläche S gegeben in der Form

$$x = u\,V_1,\quad y = u\,V_2,\quad z = u\,V_3,$$

wo die V wieder Funktionen von v allein seien, zwischen denen hier keine homogene lineare Beziehung bestehe, da sich sonst der Kegel auf eine Ebene reduzieren würde.

Die Gleichung $\Sigma\, dx\, d\bar{x} = 0$ zerfällt dann in folgende:

$$1)\ \Sigma\, V\, \bar{x}_u = 0^1) \qquad 2)\ \Sigma\, V'\, \bar{x}_v = 0$$

$$3)\ \Sigma\, V\, \bar{x}_v = \psi \qquad 4)\ u\,.\,\Sigma\, V'\, \bar{x}_u = -\psi$$

Vermöge der Integrabilitätsbedingungen ergibt sich aus 1) und 3)

$$5)\ \Sigma\, V'\, \bar{x}_u = -\psi_u$$

und aus 2) und 4)

$$6)\ u\,.\,\Sigma\, V''\, \bar{x}_u = -\psi_v\,.$$

Aus 4) und 5) ergibt sich nun die Differentialgleichung

$$\psi_u = \frac{\psi}{u},$$

$$\text{also } \psi = u\,.\,F,$$

wo F eine willkürliche Funktion von v ist. Da jetzt ψ bekannt ist, ergibt sich aus 1), 4) und 6)

$$\bar{x}_u = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & V_2 & V_3 \\ F & V'_2 & V'_3 \\ F' & V''_2 & V''_3 \end{vmatrix}}{(V\ V'\ V'')},\quad \bar{y}_u = -\frac{\begin{vmatrix} V_1 & 0 & V_3 \\ V'_1 & F & V'_3 \\ V''_1 & F' & V''_3 \end{vmatrix}}{(V\ V'\ V'')},\quad \bar{z}_u = -\frac{\begin{vmatrix} V_1 & V_2 & 0 \\ V'_1 & V'_2 & F \\ V''_1 & V''_2 & F' \end{vmatrix}}{(V\ V'\ V'')}$$

[1]) Das Σ-Zeichen deute hier an, daß mit den Koordinaten auch die Indices der Funktionen V fortschreiten, so daß $\Sigma\, V\, \bar{x}_u = V_1\, \bar{x}_u + V_2\, \bar{y}_u + V_3\, \bar{z}_u$.

Zur Abkürzung ſeien dieſe drei nur von v abhängigen Ausdrücke der Reihe nach wieder bezeichnet mit $-A_1$, $-A_2$, $-A_3$.

Integriert man nun nach u, ſo wird

$$(I)\quad \bar{x} = W_1 - u\,A_1,\quad \bar{y} = W_2 - u\,A_2,\quad \bar{z} = W_3 - u\,A_3;$$

dabei bedeuten W_1, W_2, W_3 drei nur von v abhängige Funktionen, von denen eine willkürlich gewählt werden kann, während die beiden anderen durch die aus 2) und 3) ſich ergebenden Gleichungen

$$(I')\quad \Sigma V' W' = 0,\quad \Sigma V W' = 0^1)$$

dann beſtimmt ſind. Bezeichnet λ wieder eine willkürliche Funktion von v, ſo iſt alſo

$$W_1 = \int \lambda \begin{vmatrix} V_2 & V_3 \\ V'_2 & V'_3 \end{vmatrix} dv + c_1,\qquad W_2 = \int \lambda \begin{vmatrix} V_3 & V_1 \\ V'_3 & V'_1 \end{vmatrix} dv + c_2,$$

$$W_3 = \int \lambda \begin{vmatrix} V_1 & V_2 \\ V'_1 & V'_2 \end{vmatrix} dv + c_3.$$

Zu beachten ſind wieder die Beziehungen:

$$(II)\quad \begin{array}{ll} & \Sigma V A = 0,\ \Sigma V' A = F,\ \Sigma V'' A = F', \\ \text{alſo} & \Sigma V A' = -F,\ \Sigma V' A' = 0,\ \Sigma V A'' = -F'. \end{array}$$

Das erhaltene Reſultat ſagt nun aus:

Dem Kegel entſpricht durch Orthogonalität der Elemente eine Regelfläche, nur in dem ſpeziellen Fall, daß $\lambda = 0$, alſo W_1, W_2, W_3 konſtant werden, wieder ein Kegel. Der Spitze des Kegels entſpricht die Leitlinie der Regelfläche $\bar{S}$. Die Leitlinie iſt ſowohl zu den Erzeugenden wie zu den Kurven u = conſt. des Kegels in den ſich entſprechenden Punkten ſenkrecht gerichtet.

Sie kann keine Gerade ſein, da der Kegel nicht in eine Ebene degenerieren ſoll.

---

[1]) Unter $\Sigma \varphi \psi$ ſei verſtanden $\sum_1^3 \varphi_i \psi_i$

Die aus dem Kegel durch die infinitesimale Deformation entstandene Fläche hat die Koordinaten

$$\text{(III)} \quad \begin{aligned} \xi &= x + \epsilon\bar{x} = \epsilon W_1 + u\,(V_1 - \epsilon A_1) \\ \eta &= y + \epsilon\bar{y} = \epsilon W_2 + u\,(V_2 - \epsilon A_2) \\ \zeta &= z + \epsilon\bar{z} = \epsilon W_3 + u\,(V_3 - \epsilon A_3) \end{aligned}$$

Es ergibt sich also:

Aus dem Kegel wird durch die infinitesimale Deformation eine Regelfläche, aus der Spitze des Kegels die Leitkurve derselben; für $\lambda = 0$ bleibt der Kegel erhalten.

Die im vorigen Abschnitt Seite 15 entwickelte und im gleichen Sinn wie dort aufzufassende Gleichung

$$\Sigma\, d\xi\, dX + r\,\Sigma\, dX^2 = 0$$

für die Entfernung des kürzesten Abstandes zweier konsekutiver Erzeugender von der Leitlinie lautet hier:

$$[\epsilon\,(\rho\,.\,\Sigma W'V' + \rho'\,.\,\Sigma W'V) + \epsilon^2(\rho\,.\,\Sigma W'A' + \rho'\,.\,\Sigma W'A)]\,dv^2 + u\,\Sigma\, dX^2 = 0,$$

wobei der Proportionalitätsfaktor $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{\Sigma(V - \epsilon A)^2}}$ ist.

Im Gegensatz zu der Entwicklung beim Zylinder bleiben hier die Differentialquotienten von ρ und X, Y, Z endlich. Vernachlässigt man nun die mit ϵ^2 multiplizierten Glieder und beachtet, daß die beiden ersten Glieder nach den Relationen (I') Seite 20 verschwinden, so ergibt sich u 0. Da für u 0 auch die Bedingung der Orthogonaltrajektorien zu den Erzeugenden:

$$\Sigma\, d\xi\, X = \Sigma\, \epsilon W'(V - \epsilon A) = 0$$

erfüllt ist, wenn die unendlich kleinen Glieder zweiter Ordnung wieder nicht berücksichtigt werden, so ergibt sich nach derselben Überlegung wie beim Zylinder:

Die Leitkurve der aus dem Kegel entstandenen Regelfläche ist Striktionslinie, Orthogonal-

trajektorie der Erzeugenden und geodätiſche Linie.

III. Die allgemeine Developpable.

Iſt eine abwickelbare Fläche gegeben in der dem Kegel analogen Form [1])

$$x = V_1 + u V_1', \; y = V_2 + u V_2', \; z = V_3 + u V_3',$$

ſo lauten die Gleichungen des Problems (in derſelben Schreibweiſe wie beim Kegel):

$$1) \; \Sigma V' \bar{x}_u = 0$$
$$2) \; \Sigma (V' + u V'') \bar{x}_v = 0$$
$$3) \; \Sigma V' \bar{x}_v = \psi$$
$$4) \; \Sigma (V' + u V'') \bar{x}_u = -\psi$$

oder unter Berückſichtigung von 1)

$$4') \; u \cdot \Sigma V'' \bar{x}_u = -\psi$$

Wieder ergibt ſich, da $\bar{x}_{uv} = \bar{x}_{vu}$ uſw., durch entſprechende Differentation von 1) und 3) und Subtraktion

$$5) \; \Sigma V'' \bar{x}_u = -\psi_u ,$$

und ebenſo aus 2) und 4')

$$6) \; \Sigma V' \bar{x}_{uv} + \Sigma V'' \bar{x}_v - u \Sigma V''' \bar{x}_u = \psi_v$$

Nun iſt nach 3)

$$3') \; \Sigma V' \bar{x}_{uv} = \psi_u$$

und nach 2) und 3)

$$7) \; u \Sigma V'' \bar{x}_v = -\psi,$$

alſo

$$6') \; \psi_u - \frac{\psi}{u} - \Sigma V''' \bar{x}_u = \psi_v .$$

[1]) Doch iſt hier Vorausſetzung, daß zwiſchen den Funktionen V auch keine allgemeine lineare (nichthomogene) Beziehung beſteht, da ſich ſonſt S auf eine Ebene reduziert.

Aus 4′) und 5) ergibt ſich die Gleichung

$$\psi_u = \frac{\psi}{u},$$

alſo $\psi = u \cdot F$,

wo F wieder eine willkürliche Funktion von v darſtellt.

Setzt man den Wert von ψ in 4′) und 6′) ein, ſo wird

4″). $\Sigma V'' \bar{x}_u = -F$

6″) $\Sigma V''' \bar{x}_u = -F'$

Aus 1), 4″) und 6) folgt jetzt

$$\bar{x}_u = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & V'_2 & V'_3 \\ F & V''_2 & V''_3 \\ F' & V'''_2 & V'''_3 \end{vmatrix}}{(V'\ V''\ V''')}, \quad \bar{y}_u = -\frac{\begin{vmatrix} V'_1 & 0 & V'_3 \\ V''_1 & F & V''_3 \\ V'''_1 & F' & V'''_3 \end{vmatrix}}{(V'\ V''\ V''')},$$

$$\bar{z}_u = -\frac{\begin{vmatrix} V'_1 & V'_2 & 0 \\ V''_1 & V''_2 & F \\ V'''_1 & V'''_2 & F' \end{vmatrix}}{(V'\ V''\ V''')}$$

Führt man für dieſe drei Ausdrücke der Reihe nach wieder die Abkürzungen $-A_1$, $-A_2$, $-A_3$ ein, ſo ergibt ſich durch Integration nach u:

(I) $\bar{x} = W_1 - u A_1$, $\bar{y} = W_2 - u A_2$, $\bar{z} = W_3 - u A_3$;

Für die nur von v abhängigen Funktionen W ergeben ſich wieder zwei Bedingungsgleichungen, wenn man die für $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ gefundenen Werte in Gleichung 2) und 3) einſetzt:

(I′) $\Sigma V'W' = 0$, $\Sigma V''W' = -F$.

Die Funktionen W sind alſo beſtimmt, wenn eine derſelben gewählt iſt.

Ähnlich wie beim Kegel beſtehen zwiſchen den Funktionen V und A gewiſſe ſpäter zu beachtende Beziehungen, nämlich

(II) $\Sigma V' A = 0$, $\Sigma V'' A = F$, $\Sigma V''' A = F'$,
alſo $\Sigma V' A' = -F$, $\Sigma V'' A' = 0$, $\Sigma V' A'' = -F'$.

Die Koordinaten der infinitesimal deformierten Fläche lauten

$$\text{(III)}\quad \xi = V_1 + \epsilon W_1 + u\,(V'_1 - \epsilon A_1) \text{ usw.}$$

Wir erhalten also das Resultat:

Einer abwickelbaren Fläche entspricht durch Orthogonalität der Elemente eine Regelfläche, die sich nur dann wieder auf eine abwickelbare Fläche reduziert, wenn $W'_1 = -A_1$, $W'_2 = -A_2$, $W'_3 = -A_3$ ist.

Die Leitkurve der Regelfläche $\bar{S}$, die der Rückkehrkante der abwickelbaren Fläche entspricht, kann auch hier keine Gerade sein aus demselben Grund, wie beim Kegel.

Aus den Formeln (III) ergibt sich:

Die abwickelbare Fläche wird durch die infinitesimale Deformation ebenfalls Regelfläche; nur für $W'_i = -A_i$ $(i = 1, 2, 3)$ bleibt sie weiter abwickelbar.

Es liegt nun schon die Vermutung nahe, daß die Rückkehrkante, die beim Kegel in die Spitze degeneriert ist, zur Striktionslinie wird. In der Tat ergibt sich das aus der schon in den beiden vorhergehenden Fällen angewandten, Seite 15 entwickelten Gleichung (IV). Diese lautet nämlich hier:

$$\rho \,.\, \Sigma\,(V' + \epsilon W')\,(V'' - \epsilon A') + \rho'\,\Sigma\,(V' + \epsilon W')\,(V' - \epsilon A)]\,dv^2 + u\,\Sigma\,dX^2 = 0$$

oder unter Berücksichtigung der zwischen den Funktionen V, W, A bestehenden Beziehungen (I') und (II) und unter Vernachlässigung der mit ϵ^2 multiplizierten Glieder

$$(\rho\,\Sigma\,V'\,V'' + \rho'\,\Sigma\,V'^2)\,dv^2 + u\,\Sigma\,dX^2 = 0$$

Da nun der Proportionalitätsfaktor

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\Sigma\,(V' - \epsilon A)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\Sigma\,(V'^2 - \epsilon^2 A^2)}},$$

also $\rho' = -\rho^3\,\Sigma\,V'\,V''$,

— wieder unter Vernachläſſigung der unendlich kleinen Glieder zweiter Ordnung — bewirkt, daß die beiden erſten Glieder ſich aufheben, ſo wird wieder $u = 0$, das heißt:

> Die Rückkehrkante der abwickelbaren Fläche wird durch die unendlich kleine Deformation zur Striktionslinie der hierdurch entſtandenen Regelfläche.

Die Bedingung der Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden iſt indes hier nicht erfüllt, was geometriſch ſelbſtverſtändlich iſt.

Iſt zum Beiſpiel die Rückkehrkante eine Schraubenlinie[1])

$$V_1 \cdot \cos v,\ V_2 \quad \sin v,\ V_3 \quad v,$$

ſo werden die Koordinaten der Fläche $\bar{S}$, die durch Orthogonalität der Elemente der Tangentenfläche der Schraubenlinie entſpricht:

$$\bar{x} = W_1 + u\,(F \cos v - F' \sin v)$$
$$\bar{y} = W_2 + u\,(F \sin v + F' \cos v)$$
$$\bar{z} \quad W_3 \quad u\,F'$$

W_1 und W_2 laſſen ſich durch W_3 folgendermaßen ausdrücken:

$$W_1 = \int (W'_3 \sin v + F \cos v)\, dv$$
$$W_2 = \int (-W'_3 \cos v + F \sin v)\, dv$$

Wählt man die charakteriſtiſche Funktion

$$\varphi = \frac{F}{\sqrt{\Sigma V'^2\, \Sigma V''^2 - (\Sigma V' V'')^2}}, \text{ die hier} = \frac{F}{\sqrt{2}}$$

wird, konſtant, ſo wird die Fläche $\bar{S}$ eine Regelfläche mit der xy-Ebene als Leitebene.

---

[1]) Dieſes Beiſpiel wird uns im II. Teil wieder begegnen, vergl. S. 61.

Wir wollen nun noch die Frage behandeln, ob bei den abwickelbaren Flächen etwa die Erzeugenden die Kurven ohne Verſchiebung ſein können. Als ſolche bezeichnen wir jene Kurven, für welche keine Verſchiebung in der Richtung ihrer Tangenten ſtattfindet, deren Tangenten alſo ſenkrecht zum Verſchiebungsvektor ſind; ihre Orthogonaltrajektorien heißen Verſchiebungskurven.

Die Bedingung dafür, daß die Kurven v = conſt. Kurven ohne Verſchiebung ſind, lautet offenbar $\Sigma \bar{x}\, x_u = 0$.

Für die von den Tangenten einer Raumkurve erzeugte abwickelbare Fläche muß alſo

$$\Sigma (W - u A) V' = 0$$

ſein, alſo, da $\Sigma A V' = 0$ iſt, 1) $\Sigma W V' = 0$.

Mit Rückſicht auf die Gleichungen (I') ergibt ſich hieraus durch wiederholte Differentation

$$2)\ \Sigma W V'' = 0 \text{ und } 3)\ \Sigma W V''' = F$$

Aus 1), 2), 3) folgt

$$\Sigma a W \quad \frac{F (a V' V'')}{(V' V'' V''')}$$ [1])

Erweitert man den Bruch mit $\Sigma V''^2$, ſo erhält man

$$\Sigma a W = \frac{F}{\sqrt{\Sigma V''^2}} \cdot \frac{\Sigma V''^2}{(V' V'' V''')} \cdot \frac{(a V' V'')}{\sqrt{\Sigma V''^2}} = -\varphi T (a\lambda + b\mu + c\nu)$$

wobei unter v die Bogenlänge, unter λ, μ, ν die Richtungskoſinus der Binormalen, unter T die Torſion der Rückkehrkante von S verſtanden wird und φ die charakteriſtiſche Funktion bedeutet.

Es ergibt ſich alſo:

Die Erzeugenden ſind die Kurven ohne Verſchiebung, wenn der Radiusvektor der Leitlinie von $\bar{S}$ parallel und entgegengeſetzt den Binormalen

[1]) Dieſe zuſammenfaſſende Schreibweiſe drückt wieder eine Identität in a_1, a_2, a_3 aus.

der Rückkehrkante von S und seine Größe gleich $\varphi \cdot T$ ist.

Aus dem Ansatz $\Sigma \bar{x} x_u = 0$ ergibt sich beim Kegel ohne weiteres $W_1 = W_2 = W_3 = 0$, beim Zylinder $F = 0$, also $A_1 = A_2 = 0$. Es ergibt sich also für die speziellen abwickelbaren Flächen:

Die Erzeugenden eines Kegels sind Kurven ohne Verschiebung, wenn $\bar{S}$ wieder ein Kegel ist, die eines Zylinders, wenn $\bar{S}$ sich auf eine ebene Kurve reduziert.

Zum Schluß dieses Paragraphen sei noch bemerkt, daß es charakteristisch für die abwickelbaren Flächen ist, daß in den Koordinaten der Flächen $\bar{S}$, die ihnen durch Orthogonalität der Elemente entsprechen, zwei nur von v abhängige willkürliche Funktionen vorkommen, während die charakteristische Funktion nur eine willkürliche Funktion von v enthält.

§ 3.

Die infinitesimale Deformation der Regelfläche, bei der die Erzeugenden Gerade bleiben, nach Methode Ic.

Ist die Ausgangsfläche eine abwickelbare Fläche mit den Koordinaten $\Theta_i = V_i + u V'_i$ (i = 1, 2, 3), so ist nach der in § 1 Ic Seite 7 dargelegen Methode die adjungierte Fläche S gegeben durch

$$1)\ \Sigma a x = \int (a\ V\ V') \cdot (D_I\, du + D_{II}\, dv) - \int (a, V + u V', V' + u V'') \cdot (D\, du + D_I\, dv),$$

wenn die Funktionen D, D_I, D_{II}, der drei Differentialgleichungen genügen:

$$2)\ \frac{\partial}{\partial u}\left(D_{II} V'_i - D\,(V'_i + u V''_i)\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(D\,(V'_i + u V''_i) - D_I V'_i\right) = 0 .\ (i = 1, 2, 3)$$

Führt man die Differentiationen aus, so laſſen ſich dieſe Gleichungen folgendermaßen ſchreiben:

$$2') \; V'_i \left(\frac{\partial D_{11}}{\partial u} \quad \frac{\partial D_1}{\partial u} \quad \frac{\partial D_1}{\partial v} \quad \frac{\partial D}{\partial v} \right)$$

$$V''_i \left(- u \frac{\partial D_1}{\partial u} - 2 D_1 + u \frac{\partial D}{\partial v} + D \right) + V'''_i \, . \, u D = 0$$

Da die Determinante $(V' V'' V''')$ nicht verſchwinden ſoll wegen der ſelbſtverſtändlichen Vorausſetzung, daß die Funktionen V wieder linear von einander unabhängig ſind, die Fläche mit den Koordinaten Θ_i ſich alſo nicht auf eine Ebene reduziert, ſo müſſen die mit V', V'', V''' multiplizierten Ausdrücke null ſein; das ergibt aber

$$2'') \; D = 0, D_1 = \frac{F}{u^2}, D_{11} = W - \frac{F'}{u} + \frac{F}{u^2},$$

wo unter W und F wieder zwei nur von v abhängige willkürliche Funktionen zu verſtehen ſind. Setzt man dieſe Werte in 1) ein, ſo lauten die Koordinaten der adjungierten Fläche S

$$1') \; \Sigma a x = \int \left[(a V V'') . W - (a V' V'') . F \right] dv - \frac{F}{u} (a V V')$$

Das ſind die Koordinaten einer Regelfläche. Die Koordinaten der ihr durch Orthogonalität der Elemente zugeordneten Fläche $(\bar{S})$ ſind dann gegeben durch

$$3) \quad \begin{matrix} (x_u) & D_1 \Theta_u & D \Theta_v \\ (\bar{x}^i_v) & - D_{11} \Theta^i_u & - D \Theta^i_v \end{matrix},$$

ſie werden alſo hier

$$(\bar{x}_i) = - \int W V'_i \, dv - \frac{F}{u} V'_i ;$$

das wird die Koordinaten einer abwickelbaren Fläche, die zur Ausgangsfläche aſſoziiert iſt. Wie ſchon im vorigen Paragraphen erwähnt, würde man durch Bildung der zu dieſer Fläche $(\bar{S})$ ad-

jungierten Fläche die Koordinaten der infinitesimalen Deformation der Fläche mit den Koordinaten O_i erhalten, doch führte der direkte Weg zu den einfacheren und übersichtlicheren Resultaten.

Die Koordinaten der allgemeinsten infinitesimalen Deformation der Regelfläche S lauten nun

$$4)\quad x_u^i = \frac{V_i + u V'_i}{V'} \frac{\rho}{\rho_u} \frac{F}{u^2}$$

$$\bar{x}_v^i = \frac{V_i + u V'_i}{V'_i} \frac{\rho}{\rho_u} \left(W - \frac{F'}{u} + \frac{F}{u^2} \right) - \frac{V_i + u V'_i}{V'_i} \frac{\rho}{\rho_v} \frac{F}{u^2},$$

wo ρ die allgemeime Lösung der Gleichung

$$5)\quad \frac{\partial}{\partial u} (D_{11} \rho_u - D_1 \rho_v) + \frac{\partial}{\partial v} (D \rho_v - D_1 \rho_u) = 0,$$

in unserem Falle also

$$\rho_{uu} \left(W - \frac{F'}{u} + \frac{F}{u^2} \right) - 2 \rho_{uv} \frac{F}{u^2} + (\rho_v - \rho_u) \frac{2F}{u^3} = 0,$$

ist. Die charakteristische Funktion ist, wie erwähnt, $\frac{\rho}{r} = \frac{\rho}{\sqrt{2 O}}$.

Nun läßt sich zeigen, daß, wenn die Koordinaten einer Regelfläche S in der Form $x_i = a_i + u\, b_i$ gegeben sind, die der Fläche $\bar{S}$ von der Form $\bar{x}_i = \alpha_i + u\, \beta_i$, also ebenfalls ganzer, in u linearer Funktionen sein müssen[1]), falls den Geraden wieder Gerade entsprechen sollen — unter a, b, α, β Funktionen von v allein verstanden. Für eine solche Deformation muß also dann die charakteristische Funktion sein:

$$\varphi = \frac{\Sigma x_u \bar{x}_v}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\Sigma b (\alpha' + u \beta')}{\sqrt{EG - F^2}}$$

Ersetzt man nun in den Koordinaten O der als Ausgangsfläche gewählten abwickelbaren Fläche u durch $\frac{1}{u'}$, so nehmen die

[1]) Voß, „Infinitesimale Biegungsdeformationen" Sitzungs-Bericht der Münchener Akademie 1897, S. 285.

Koordinaten der adjungierten Regelfläche S die Form an $x_i = a_i + u' b_i$, ſie werden nämlich

$$\Sigma a x \int [(a V V') W - (a V' V'') F] dv - u' F (a V V').$$

D_1 wird hier gleich $u'^2 F$.

Beachtet man nun, daß in dieſer Darſtellung

$$\sqrt{EG - F^2} = r (D D_{11} - D_1^2) . (\Theta \Theta_u \Theta_v) = r u' F (V V' V''),$$

ſo hat man

$$\varphi \quad \frac{\rho}{r} \quad \frac{\Sigma b (\alpha' + u' \beta')}{r u' F (V V' V'')} \text{ oder } \rho \quad \frac{\Sigma b (\alpha' + u' \beta')}{u' F (V V' V'')};$$

ρ iſt alſo von der Form $A + \frac{1}{u'} B$ $A + u B$, wo A und B nur von v abhängen. Setzt man die lineare Funktion, auf die ſich ρ für dieſen Fall reduziert, in die Gleichung 5) ein:

$$- 2 B' \frac{F}{u^2} + (A' + u B' - B) \frac{2 F}{u^3} = 0,$$

ſo ergibt ſich $B = A'$.

Die allgemeinſte charakteriſtiſche Funktion für die infinitesimale Deformation einer Regelfläche, deren Erzeugende geradlinig bleiben ſollen, iſt alſo in dieſer Darſtellung

$$\varphi = \frac{A + u A'}{\sqrt{\Sigma V^2 + 2 u \Sigma V V' + u^2 \Sigma V'^2}}$$

Die Koordinaten der zu dieſer charkteriſtiſchen Funktion gehörigen Verbiegung werden nach 4)

$$\bar{x}_i = \int \left(\begin{vmatrix} V_i & A \\ V'_i & A' \end{vmatrix} W - \begin{vmatrix} V'_i & A' \\ V''_i & A'' \end{vmatrix} F \right) dv - \frac{F}{u} \begin{vmatrix} V_i & A \\ V'_i & A' \end{vmatrix}.$$

Das ſind die Koordinaten einer abwickelbaren Fläche. Für

A 1 geht dieſe Fläche $\bar{S}$ über in die Fläche $(\bar{S})$. Wir erhalten alſo:

Bei der infinitesimalen Deformation einer Regelfläche S, bei welcher die Erzeugenden Gerade bleiben ſollen, ergibt ſich als allgemeinſte durch Orthogonalität der Elemente entſprechende Fläche S eine abwickelbare Fläche.[1])

Wie bei der abwickelbaren Fläche ſo ergibt ſich auch für den eben behandelten Fall, der ja die Umkehrung des im vorigen Paragraphen behandelten iſt, daß die charakteriſtiſche Funktion φ nur eine willkürliche Funktion von v enthält; im Gegenſatz zu dem im vorigen Paragraphen behandelten Fall iſt aber φ nicht mehr von v allein abhängig, ferner enthalten die Koordinaten $\bar{S}$ hier nur eine willkürliche Funktion von v.

§ 4.

Die allgemeine infinitesimale Deformation einer Regelfläche mit Leitebene nach Methode I c.

Sind die Koordinaten eines Zylinders als die Funktionen Θ gewählt

$$\Theta_1 = V_1,\ \Theta_2 = V_2,\ \Theta_3 = u,$$

ſo lauten die Gleichungen 2) des § 1 I c S. 7

$$\frac{\partial}{\partial u}(-D_1 V'_i) + \frac{\partial}{\partial v}(D V'_i) = 0 \text{ für } i = 1, 2,$$

$$\text{und } \frac{\partial D_{11}}{\partial u} - \frac{\partial D_1}{\partial v} = 0$$

Daraus ergibt ſich

$$D = 0,\ D_1 = F(v),\ D_{11} = u F(v) + W(v)$$

[1]) Das iſt auch daraus zu ſchließen, daß für zwei durch Orthogonalität der Elemente ſich entſprechenden Flächen die Relation $D \bar{D}'' - 2 D \bar{D}' + \bar{D} D'' = 0$ beſteht.

Die zum Zylinder adjungierte Fläche S hat alſo die Koordinaten

$$x = \int W V_2 \, dv + u F V_2, \; y = -\int W V_1 \, dv - u F V_1,$$

$$z = -\int \begin{vmatrix} V_1 & V_2 \\ V'_1 & V'_2 \end{vmatrix} \cdot F \, dv$$

ſie iſt alſo eine Regelfläche, deren Erzeugenden parallel ſind zur xy-Ebene.

Die Differentialgleichung für ρ lautet nun hier

$$\rho_{uu} (u F' + W) - 2 \rho_{uv} F = 0$$

Setzt man $\rho_u = \sigma$, ſo reduziert ſich dieſelbe auf eine in u lineare Gleichung erſter Ordnung, während der allgemeine Fall der Regelfläche auf eine Gleichung vom Riccatiſchen Typus führen würde.

Es wird

$$\sigma = \sigma \left(2 u \sqrt{F} + \int \frac{W}{\sqrt{F}} dv\right), \text{ alſo } \rho = \int \sigma \, du + \Phi (v)$$

Die durch die charakteriſtiſche Funktion ρ gelieferten Koordinaten der infinitesimalen Deformation ergeben ſich aus

$$\begin{aligned}
\bar{x}_u &= V_1 F \sigma, \; \bar{y}_u = V_2 F \sigma, \; \bar{z}_u = (u \sigma - \rho) F \\
\bar{x}_v &= V_1 (F' u + W) \sigma - V_1 F \rho_v + V'_1 F \rho \\
\bar{y}_v &= V_1 (F' u + W) \sigma - V_2 F \rho_v + V'_2 F \rho \\
z_v &= (u \sigma - \rho) (F' u + W) - u \rho_v F.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\bar{x} = V_1 F \rho + \int \psi V_1 \, dv$$

$$\bar{y} = V_2 F \rho + \int \psi V_2 \, dv$$

$$\bar{z} = F (u \rho - 2 \int \rho \, du) + \chi (v)$$

ψ und χ ſind Funktionen von v, die durch die Wahl von ρ beſtimmt ſind.

Macht man die Subſtitution

$$u_1 = 2\,u\sqrt{F} + \int \frac{W}{\sqrt{F}}\,dv$$

durch welche die Darſtellung der Regelfläche S nicht weſentlich geändert wird — ſie bleibt auf ihre Erzeugenden bezogen — ſo zeigt ſich, daß in dieſem Falle die charakteriſtiſche Funktion abhängig iſt von zwei willkürlichen Funktionen, von denen die eine nur u_1, die andere nur v enthält.

Es ergibt ſich alſo, daß für den ſpeziellen Fall der Regelfläche mit Leitebene das Problem in expliciten Koordinaten lösbar iſt, auch wenn die Fläche auf allgemeine Koordinaten, nämlich ihre Erzeugenden und eine beliebige Kurvenſchar v = conſt. bezogen iſt; es treten dabei als willkürliche Funktionen zwei von v beziehungsweiſe u_1 abhängige Funktionen auf.

Ohne die gemachte Transformation ergibt ſich das unmittelbar für W = 0 und F = conſt. Die Fläche iſt in dieſem Fall ein auf ſeine Haupttangentenkurven bezogenes gerades Conoid. ρ nimmt hier die Form U (u) + V (v) an und die Fläche $\bar{S}$ hat dann die Koordinaten

$$\bar{x} = V_1 (U + V) - 2\int V_1 V'\,dv$$

$$\bar{y} = V_2 (U + V) - 2\int V_2 V'\,dv$$

$$\bar{z} = u\,U - 2\int U\,du - u\,V$$

Sie iſt bezogen auf ein konjugiertes Syſtem. Für U = u wird ſie abwickelbar.

§ 5.

Die auf ihre Haupttangentenkurven bezogene Regelfläche.

Während der vorige Paragraph einen Fall behandelte, in dem ſich das Problem der infinitеſimalen Deformation löſen läßt, ohne daß die Fläche auf ihre Haupttangentenkurven

bezogen ist, wollen wir für die Behandlung der allgemeinen Regelfläche diese Darstellung voraussetzen. Es würde dann zunächst naheliegen, die in § 1 unter II oder IV a aufgeführte Methode anzuwenden, die ja in der Tat zu Lösungen bis auf Quadraturen führen[1]); allein, wie schon eingangs erwähnt, lassen sich diese nicht so auswerten, daß man zu übersichtlichen Ausdrücken für die Koordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ kommt. Dagegen führen die mit I c und IV b bezeichneten Methoden rasch zum Ziel.

I.

Soll die Regelfläche nach den Lelieuvreschen Formeln auf ihre Haupttangentenkurven bezogen sein[2]), so ist auszugehen von der Normalform der Laplaceschen Gleichung für die Regelfläche

$$1)\quad \vartheta_{uv} = -\frac{2\,\vartheta}{(v-u)^2}$$

Das allgemeine Integral derselben ist

$$2)\quad \vartheta = 2\,\frac{f(v)-\varphi(u)}{v-u} - f'(v) - \varphi'(u)$$

Da nun bei dieser Darstellung der Regelfläche die Richtungskosinus der Flächennormale X, Y, Z sich verhalten wie die zu wählenden partikulären Integrale ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 und da, wenn die Regelfläche auf ihre Erzeugenden bezogen ist, eine Relation von der Form $V_1 X + V_2 Y + V_3 Z = 0$ besteht, also auch $\Sigma V \vartheta = 0$, unter V_i Funktionen von v allein verstanden, so sind als partikuläre Lösungen von 1) zu wählen:

$$3)\quad \vartheta_i = \frac{2\,f_i(v)}{v-u} - f'_i(v).$$

[1]) Bianchi, Diff.-Geom. S. 308.

Voß, „Beiträge zur Theorie der unendlich kleinen Deformationen einer Fläche". Sitzungs-Bericht der Münchener Akademie, 1904. S. 189.

[2]) Diese Darstellung gibt Goursat, „Sur les lignes asymptotiques", Bulletin de la société mathématique. Bd. 24, S. 43.

Mittels dieſer ſtellen ſich dann die Koordinaten der Regelfläche dar in der Form:

$$4)\ \Sigma\, a\, x = \int (a\, f'\, f'')\, dv - 2\,\frac{(a\, f\, f')}{v-u}\,.$$

Wendet man nun die in § 1 I b angeführte Methode an, ſo werden die Koordinaten der Fläche $\bar{S}$ nach einigen Umformungen

$$\bar{x}_i = \varphi'\, f_i + \frac{2}{v-u}\left(\begin{vmatrix} f_i & f \\ f'_i & f' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f_i & \varphi \\ f'_i & \varphi' \end{vmatrix}\right) - \int \begin{vmatrix} f'_i & f' \\ f''_i & f'' \end{vmatrix} dv$$

Die Fläche iſt auf ein konjugiertes Syſtem bezogen. Für $\varphi = a\,u + b$ wird ſie abwickelbar.

Die im vorigen Paragraphen behandelten Regelflächen mit Leitebene ſind hier nicht eingeſchloſſen; doch wird auf ein ſpäter zu behandelndes Beiſpiel [1]) dieſer ſpeziellen Gruppe dieſelbe Methode anzuwenden ſein mit der entſprechenden Form der Laplaceſchen Differentialgleichung $\vartheta_{uv} = 0$.

II.

Ein klares, dem eben erhaltenen ähnliches und alle Regelflächen umfaſſendes Reſultat liefert Methode IV b.

Iſt die Regelfläche in der Form $x_i = V_i + u\,W_i$ gegeben, ſo lauten die Anſatzgleichungen:

$$1)\ \Sigma\, \bar{x}\, x_u = \Sigma\, \bar{x}\, W = \rho$$
$$2)\ \Sigma\, \bar{x}\, x_v = \Sigma\, \bar{x}\, (V' + u\, W') = \sigma$$
$$3)\ \Sigma\, \bar{x}\, x_{uu} = 0 = \rho_u$$
$$4)\ \Sigma\, \bar{x}\, x_{uv} = \Sigma\, \bar{x}\, W' = \frac{\rho_v + \sigma_u}{2}$$
$$5)\ \Sigma\, \bar{x}\, x_{vv} = \Sigma\, \bar{x}\, (V'' + u\, W'') = \sigma_v\,.$$

Aus 3) ergibt ſich ohne weiteres $\rho = F(v)$. Für σ erhält man

[1]) Siehe § 8.

im allgemeinen Fall [1]) durch Elimination von $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ eine Differentialgleichung vom Riccatiſchen Typus,[2]) alſo genau demſelben, der die Haupttangentenkurven einer Regelfläche beſtimmt. Nehmen wir indes von vornherein an, die Regelfläche ſei auf ihre Haupttangentenkurven bezogen,[3]) ſo wird ſich σ aus einer linearen Gleichung berechnen laſſen. Es iſt nämlich nach 1), 2) und 4)

$$6)\quad \bar{x} = \frac{\begin{vmatrix} F & W_2 & W_3 \\ \sigma & V'_2 + u W'_2 & V'_3 + u W'_3 \\ \frac{1}{2}(F' + \sigma_u) & W'_2 & W'_3 \end{vmatrix}}{(W\,V'\,W')};$$

analoge Ausdrücke ergeben ſich für $\bar{y}$ und $\bar{z}$.

Nach 5) wird alſo

$$7)\ \sigma_v \quad \Sigma \bar{x}\,(V''_1 + u W''_1) \quad \frac{1}{(W\,V'\,W')} \begin{vmatrix} V''_1 + u W''_1 & V''_2 + u W''_2 & V''_3 + u W''_3 & 0 \\ W_1 & W_2 & W_3 & F \\ V'_1 + u W'_1 & V'_2 + u W'_2 & V'_3 + u W'_3 & \sigma \\ W'_1 & W'_2 & W'_3 & \frac{F' + \sigma}{2} \end{vmatrix}$$

Iſt nun die Fläche auf ihre Haupttangentenkurven bezogen, ſo iſt

$$8)\quad D'' = \frac{(V'' + u W'',\ W,\ V' + u W')}{\sqrt{E G - F^2}} = 0,$$

alſo auch

$$8')\quad \begin{matrix} (V''\ W\ V') = 0, (W''\ W\ W') = 0 \\ (V''\ W\ W') + (W''\ W\ V') = 0. \end{matrix}$$

[1]) Siehe Demoulin, „Sur la correspondance par orthogonalité des éléments, Comptes rendus de l'Académie des sciences“. 1893. Bd. 116, S. 684, wo eben der Fall der nicht auf ihre Haupttangentenkurven bezogenen Regelfläche als Beiſpiel gewählt iſt.

[2]) Vergl. S. 32.

[3]) Zwiſchen den Funktionen V und W beſtehen dann gewiſſe Relationen, die von Königs in den „Comptes rendus de l'Académie des sciences“, 1888, Bd. 106, S. 51 entwickelt werden; doch brauchen ſie hier nicht in Anſpruch genommen zu werden.

Unter Berückſichtigung dieſer Gleichungen wird Gleichung 7) zunächſt

$$9)\ \sigma_v (W V' W') - \sigma (V'' W W') - F\left[(V'' V' W') + u (W'' V' W')\right] = 0$$

Bezeichnet man die nur von v abhängigen Determinanten der Reihe nach mit P, Q, R, S und beachtet, daß nach 8')

$$P' = (W V'' W') + (W V' W'') = 2 (W V'' W') = -2 Q,$$

ſo lautet die Gleichung 9)

$$9')\ \sigma_v P - \tfrac{1}{2} \sigma P' - F (R - u S) = 0$$

Daraus folgt

$$10)\ \sigma = \sqrt{P}\left[\int \frac{F}{P^{\frac{3}{2}}} (R - u S)\, dv + U(u)\right] \sqrt{L + u M + U \sqrt{P}},$$

wo U eine willkürliche Funktion von u iſt und L und M Abkürzungen ſind für die nur von v abhängigen Ausdrücke:

$$L = \sqrt{P} \int \frac{F R}{P^{\frac{3}{2}}}\, dv,\quad M = \sqrt{P} \int \frac{F S}{P^{\frac{3}{2}}}\, dv$$

Jetzt laſſen ſich aus 1), 2) und 4) $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ berechnen:

$$\bar{x} = \frac{1}{P} \begin{vmatrix} F & W_2 & W_3 \\ L + u M + U \sqrt{P} & V'_2 + u W'_2 & V'_3 + u W'_3 \\ \frac{1}{2} (F' + M + U' \sqrt{P}) & W'_2 & W'_3 \end{vmatrix}$$

Analoge Ausdrücke ergeben ſich für $\bar{y}$ und $\bar{z}$. Die Koordinaten der geſuchten Fläche $\bar{S}$ nehmen alſo die Form an

$$12)\ \bar{x}_i = (U - \tfrac{1}{2} U' u) A_i + U' B_i + u C_i + D_i$$

wo

$$12') \quad \Sigma\, a\, A = -\frac{1}{\sqrt{P}}\,(a\,W\,W')$$

$$\Sigma\, a\, B = \frac{1}{2\sqrt{P}}\,(a\,W\,V')$$

$$\Sigma\, a\, C = \frac{F' - 2M}{2P}\,(a\,W\,W')$$

$$\Sigma\, a\, D = \frac{F\,(a\,V'\,W') - L\,(a\,W\,W') + \frac{F' + M}{2}\,(a\,W\,V')}{P}$$

Diese Ausdrücke vereinfachen sich noch, wenn man berücksichtigt, daß nach 8) wegen $(W''\,W\,W') = 0$ eine homogene lineare Beziehung etwa von der Art $\alpha\,W_1 + \beta\,W_2 + \gamma\,W_3 = 0$ besteht. Dann ergibt sich nämlich durch Multiplikation mit

$$(\alpha\;W\;W') \qquad \sqrt{\Sigma\,\alpha^2}\,\begin{vmatrix} \Sigma W^2 & \Sigma W W' \\ \Sigma W W' & \Sigma W'^2 \end{vmatrix} = \delta\sqrt{\Delta},$$

wenn wir $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \delta^2$ und $\begin{vmatrix} \Sigma W^2 & \Sigma W W' \\ \Sigma W W' & \Sigma W'^2 \end{vmatrix} = \Delta$ setzen:

$$(a\;W\;W') = \frac{\Sigma\, a\,\alpha}{\delta}\sqrt{\Delta};\quad P = (W\,V'\,W') = -\frac{\Sigma\,\alpha V'}{\delta}\sqrt{\Delta},$$

also

$$12'') \quad \Sigma\, a\, A = \frac{\Sigma\, a\,\alpha}{\sqrt{\delta}} \cdot \frac{\sqrt[4]{\Delta}}{\sqrt{\Sigma\,\alpha\,V'}}$$

$$\Sigma\, a\, B = -\frac{\sqrt{\delta}\;.\;(a\;W\;V')}{2\sqrt{\Sigma\,\alpha\,V'}\,\sqrt[4]{\Delta}}$$

$$\Sigma\, a\, C = \frac{-F + 2M}{2\,\Sigma\,\alpha\,V'} \cdot \Sigma\, a\,\alpha$$

$$\Sigma\, a\, D = \frac{-\delta\,F\,(a\,V'\,W') + L\,\Sigma\, a\,\alpha\sqrt{\Delta} - \frac{\delta}{2}\,(F' + M)\,(a\,W\,V')}{\Sigma\,\alpha\,V'\sqrt{\Delta}}$$

Die Funktionen A und C ſind alſo durch dieſelbe homogene lineare Gleichung unter einander verbunden.

Wie bei der Behandlung nach der Methode I b treten alſo wieder zwei willkürliche Funktionen auf, von denen die eine nur von v, die andere nur von u abhängt.

Die Fläche iſt wieder auf ein konjugiertes Syſtem bezogen.

Für $U = a\,u + b$ wird ſie abwickelbar.

Sind die Erzeugenden der Regelfläche alle parallel zur xy-Ebene, alſo $W_3 = 0$, ſo iſt

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= U' B_1 + D_1 \\
\bar{y} &= U' B_2 + D_2 \\
\bar{z} &= \left(U - \frac{U' u}{2} \right) A_3 + U' B_3 + u C_3 + D_3 .
\end{aligned}$$

Die zur Abkürzung verwendeten Buchſtaben beſtimmen ſich aus 12′)

Wir wollen nun wie in § 2 die Frage aufwerfen, wann die Erzeugenden die Kurven ohne Verſchiebung darſtellen. Die Bedingung hierfür lautet $\Sigma \bar{x}\, x_u = 0$. Wir erhalten alſo nach der letzten Löſung

$$\rho = F = 0$$

alſo aus 9′) $\sigma = \sqrt{P} \cdot U$,
demnach

$$\bar{x}_i = (U - \tfrac{1}{2} U' u)\, A_i + U' B_i$$

als die Koordinaten der der Regelfläche durch Orthogonalität der Elemente entſprechenden Fläche.

II. Teil.

§ 6.

Überſicht über die „zwölf Flächen“.

Wie ſchon in der Einleitung bemerkt, laſſen ſich nun an die Löſung der infiniteſimalen Deformation einer Fläche eine Reihe von Betrachtungen anknüpfen, die ſich teils auf die Flächen S und $\bar{S}$ ſelbſt, teils auf andere Flächen, welche mit dieſen zuſammenhängen, und auf Strahlenſyſteme, die von ihnen ausgehen, beziehen.

Zunächſt iſt zu erwähnen, daß durch jede infiniteſimale Deformation zwei Gruppen von aufeinander abwickelbaren Flächen vermittelt werden, nämlich die Flächen mit Koordinaten

$$\xi_i = x_i + \lambda \bar{x}_i \quad \text{und} \quad \xi'_i = x_i - \lambda \bar{x}_i,$$

wo λ eine beliebige Konſtante iſt. Es gilt alſo nach den Entwicklungen des I. Teils der Satz:

> Die infiniteſimale Deformation der abwickelbaren Fläche liefert unendlich viele Paare von aufeinander abwickelbaren Regelflächen.

Ferner hängt mit der infiniteſimalen Deformation einer Fläche die Beſtimmung der aſſoziierten[1]) Flächen eng zuſammen. Zwei Flächen S und S_0 ſind aſſoziiert, wenn

1. ihre Normalen in den Punkten, welche gleichen Wertepaaren u, v entſprechen, parallel ſind, und
2. zwiſchen den Koëffizienten der zweiten Grundformen beider Flächen D, D′, D″ und D_0, D'_0, D''_0 die Relation $D D''_0 - 2 D' D'_0 + D'' D_0 = 0$ beſteht.

Führen wir noch den Begriff der adjungierten Fläche ein,[2]) ſo bilden die folgenden vier Flächen ein in ſich abgeſchloſſenes

[1]) Bianchi, Diff.-Geom. S. 293.

[2]) Die Definition der adjungierten Fläche iſt S. 7 gegeben; die Bezeichnungen ſind dieſelben wie dort.

Syſtem[1]): 1. Die Fläche Θ, 2. die zu ihr adjungierte Fläche S, 3. die der Fläche S durch Orthogonalität der Elemente entſprechende, zur Fläche Θ aſſoziierte Fläche ($\bar{S}$), 4. die der Fläche Θ durch Orthogonalität der Elemente entſprechende, zu ($\bar{S}$) adjungierte Fläche $\bar{\Theta}$.

Endlich läßt ſich an die Löſung des Problems der infinitеſimalen Deformation einer Fläche S ein Syſtem von 12 Flächen[2]) anſchließen, die ſich paarweiſe teils durch Orthogonalität der Elemente, teils durch Parallelismus der Normalen, teils als reziproke Polarflächen in bezug auf die Kugel vom Radius i und teils als Brennflächenmäntel eines W-Strahlenſyſtems entſprechen.

Dieſe verſchiedenen Flächen ſeien nun zunächſt zu einander in Beziehung geſetzt, ihre Haupteigenſchaften zuſammengeſtellt und ihre Bezeichnung feſtgelegt:

1. Die Ausgangsfläche S habe die Koordinaten x, y, z.

2. Die ihr durch Orthogonalität der Elemente entſprechende Fläche $\bar{S}$ mit den Koordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$.

Für dieſe beiden Flächen gelten dann folgende Sätze:

Einer Fläche S mit poſitivem Krümmungsmaß entſpricht nur eine Fläche $\bar{S}$ mit negativem.[3])

Den Haupttangentenkurven einer Fläche S entſpricht auf $\bar{S}$ ein konjugiertes Syſtem mit gleichen Invarianten.[4])

Zieht man auf $\bar{S}$ Strahlen, die zu den Normalen in den entſprechenden Punkten von S parallel ſind, ſo entſteht ein Ribaucourſches Strahlenſyſtem, deſſen Mittelfläche $\bar{S}$ iſt.[5])

Die Koordinaten der zu S aſſoziierten Fläche S_0, x_0, y_0, z_0 genügen dem Syſtem

[1]) Voß, „Infinitеſimale Biegungsdeformationen“, Sitzungs-Bericht der Münchener Akademie. 1897, S. 229 ff., vergl. S. 7 und 8.

[2]) Darboux, Théorie des surfaces, Bd. IV, Seite 48 ff.

[3]) Bianchi, Diff.-Geom. S. 297.

[4]) Darboux, Théorie des surfaces, Bd. IV, S. 50.

[5]) Bianchi, Diff.-Geom. S. 302.

$$d\bar{x} = z_0\ dy - y_0\ dz$$
$$d\bar{y} = x_0\ dz - z_0\ dx$$
$$d\bar{z} = y_0\ dx - x_0\ dy^{1})$$

Für die drei Flächen S, $\bar{S}$ und S_0 gelten die Gleichungen[2])

$$D\ \bar{D}'' - 2\ D'\ \bar{D}' + \bar{D}\ D'' = 0$$
$$D\ D''_0 - 2\ D'\ D'_0 + D_0\ D'' = 0$$
$$D_0\ \bar{D}'' - 2\ D'_0\ \bar{D}' + \bar{D}\ D''_0 = 0$$

Den Haugttangentenkurven auf einer der drei Flächen entſpricht alſo auf den beiden anderen ein konjugiertes System.

4. Zu $\bar{S}$ iſt aſſoziiert die Fläche S_0, deren Koordinaten $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$, $\bar{z}_0$ ſich aus dem Syſtem

$$dx = \bar{z}_0\ d\bar{y} - \bar{y}_0\ d\bar{z}$$
$$dy = \bar{x}_0\ d\bar{z} - \bar{z}_0\ d\bar{x}$$
$$dz = \bar{y}_0\ d\bar{x} - \bar{x}_0\ d\bar{y}$$

ergeben.

Iſt nach Methode I b die Fläche $\bar{S}$ ermittelt in der Form

$$\bar{x}_i = \int \begin{vmatrix} \mathfrak{Y}_i & \omega \\ \mathfrak{Y}^i_u & \omega_u \end{vmatrix} du - \begin{vmatrix} \mathfrak{Y}_i & \omega \\ \mathfrak{Y}^i_v & \omega_v \end{vmatrix} dv,$$

wo $\mathfrak{Y}_1$ $\mathfrak{Y}_2$ $\mathfrak{Y}_3$ partikuläre, ω die allgemeine Löſung von

$$\mathfrak{Y}_{uv} \quad M . \mathfrak{Y}$$

ſind, ſo ſind die Koordinaten von $\bar{S}_0$

$$\bar{x}_0 = \frac{\mathfrak{Y}_1}{\omega},\ \bar{y}_0 = \frac{\mathfrak{Y}_2}{\omega},\ \bar{z}_0 = \frac{\mathfrak{Y}_3}{\omega}.^{3})$$

Iſt S nach Methode I c gegeben in der Form

[1]) Darboux, Théorie des surfaces, Bd. IV, S. 66.

[2]) Eiſenhart, „Infinitesimal deformation of surfaces", Americ. Journal of math., Bd. 24, S. 182.

[3]) Darboux, Théorie des surfaces, Bd. IV, S. 49.

$$\Sigma a x \int (a\ \Theta\Theta_u)\ (D_1\ du + D_{11}\ dv) - (a\ \Theta\Theta_v)\ (D\ du + D_1\ dv),$$

ſo hat die zur Fläche Θ aſſoziierte Fläche die Koordinaten

$$\frac{\partial\ \Theta_0^i}{\partial u} = D_1\ \Theta_u^i - D\ \Theta_v^i, \qquad \frac{\partial\ \Theta_0^i}{\partial v} = D_{11}\ \Theta_u^i - D_1\ \Theta_v^i\ ^1)$$

Die zur Fläche S, deren Koordinaten hier durch

$$\bar{x}_u^i = (\rho_u D_1 - \rho_v D)\ \Theta_i - \rho . (D_1\ \Theta_u^i - D\ \Theta_v^i)$$
$$\bar{x}_v^i = (\rho_u D_{11} - \rho_v D_1)\ \Theta_i - \rho . (D_{11}\ \Theta_u^i - D_1\ \Theta_v^i)$$

gegeben ſind, aſſoziierte Fläche $\bar{S}_0$ hat hier die Koordinaten

$$\bar{x}_0 = \frac{\Theta_1}{\rho},\ y_0 = \frac{\Theta_2}{\rho},\ z_0 = \frac{\Theta_3}{\rho},$$

wie ſich leicht beſtätigen läßt; dabei iſt hier ρ die allgemeine Löſung der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial u}(D_{11}\ \rho_u - D_1\ \rho_v) + \frac{\partial}{\partial v}(D\ \rho_v - D_1\ \rho_u) = 0$$

Die adjungierte Fläche zu der einen aſſoziierten Fläche entſpricht der andern durch Orthogonalität der Elemente.

Die Normale der adjungierten Fläche iſt, wie aus der Koordinatendarſtellung leicht erſichtlich iſt, parallel zum Radiusvektor der Ausgangsfläche.

5. Der Fläche S_0 entſpricht durch Orthogonalität der Elemente die Fläche Σ_0 [1]); die Koordinaten ſind gegeben durch die Ausdrücke

$$\xi_0 = \bar{x} - z_0\ y + y_0\ z$$
$$\eta_0\ \ y - x_0\ z + z_0\ x$$
$$\zeta_0 - \bar{z} - y_0\ x + x_0\ y$$

---

[1]) Voß, „Infiniteſimale Biegungsdeformationen“, Sitzungs-Bericht der Münchener Akademie, 1897, S. 242 ff., vergl. S. 8.

[2]) Die folgenden Formeln ſind entwickelt bei Darboux, Théorie des surfaces, Bd. IV, S. 49 ff.

oder mit Rückſicht auf die Darſtellung der Koordinaten von S_0, durch das Syſtem von Differentialgleichungen

$$d\xi_0 = z\,dy_0 - y\,dz_0$$
$$d\eta_0 = x\,dz_0 - z\,dx_0$$
$$d\zeta_0 = y\,dx_0 - x\,dy_0$$

6. Analog lauten die Koordinaten der Fläche $\bar{\Sigma}_0$, die der Fläche $\bar{S}_0$, durch Orthogonalität der Elemente entſpricht:

$$\bar{\xi}_0 = x - \bar{z}_0\,\bar{y} + \bar{y}_0\,\bar{z}$$
$$\bar{\eta}_0 = y - \bar{x}_0\,\bar{z} + \bar{z}_0\,\bar{x}$$
$$\bar{\zeta}_0 = z - \bar{y}_0\,\bar{x} + \bar{x}_0\,\bar{y}$$

Durch Differentiation ergibt ſich wieder unter Berückſichtigung der Ausdrücke für die Koordinaten von $\bar{S}_0$ das Syſtem

$$d\bar{\xi}_0 = \bar{z}\,d\bar{y}_0 - \bar{y}\,d\bar{z}_0$$

S und $\bar{\Sigma}_0$ einerſeits, $\bar{S}$ und Σ_0 andererſeits, ſind die Brennflächenmäntel eines Strahlenſyſtems, das dadurch entſteht, daß man in der Tangentialebene von S beziehungsweiſe $\bar{S}$ Senkrechte zum Verſchiebungsvektor zieht. Auf ſolchen Flächen entſprechen ſich die konjugierten Syſteme, insbeſondere auch die Haupttangentenkurven.

S_0 und $\bar{S}_0$ endlich ſind reziproke Polarflächen in bezug auf die Kugel vom Radius 1; auf ihnen entſprechen ſich ebenfalls die konjugierten Syſteme, ſpeziell alſo auch die Haupttangentenkurven.

Es ſchließen ſich nun noch 6 Flächen an, die in ganz analoger Weiſe gebildet und miteinander beziehungsweiſe mit den erſten ſechs verknüpft ſind. Ihre Koordinaten ſind auf algebraiſchem Weg zu ermitteln. Sie gehen durch Aſſoziationen aus den Flächen Σ_0 und $\bar{\Sigma}_0$ hervor; ihre Koordinaten mögen durch große Buchſtaben mit den entſprechenden Indices bezeichnet ſein.

7. Aſſoziiert zu Σ_0 iſt $S_{0'0}$ mit den Koordinaten X_0, Y_0, Z_0.

8. Dieſer Fläche entſpricht durch Rechtwinkligkeit der Elemente Σ_{00} mit den Koordinaten Ξ_0, H_0, Z_0:

$$\begin{array}{cccccccc} X_0 & Y_0 & Z_0 & \Xi_0 & H_0 & Z_0 & 1 & 1 \\ \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 & \bar{\xi}_0 & \bar{\eta}_0 & \bar{\zeta}_0 & \Sigma x \bar{x}_0 & \Sigma \bar{x}_0 \bar{\xi}_0 \end{array}$$

9. Aſſoziiert zu Σ_0 iſt die Fläche $\bar{S}_{00}$ mit den Koordinaten $\bar{X}_0$, $\bar{Y}_0$, Z_0.

10. Ihr entſpricht durch Orthogonalität der Elemente die Fläche $\bar{\Sigma}_{00}$ mit den Koordinaten $\bar{\Xi}_0$, $\bar{H}_0$, $\bar{Z}_0$.

$$\begin{array}{cccccccc} \bar{X}_0 & \bar{Y}_0 & \bar{Z}_0 & \bar{\Xi}_0 & \bar{H}_0 & \bar{Z}_0 & \dfrac{1}{\Sigma \bar{x} x_0} & \dfrac{1}{\Sigma x_0 \bar{\xi}_0} \\ x_0 & y_0 & z_0 & \xi_0 & \eta_0 & \zeta_0 & & \end{array}$$

11. Endlich iſt zu Σ aſſoziiert die Fläche S' mit den Koordinaten X^0, Y^0, Z^0 und ihr entſpricht

12. durch Rechtwinkligkeit der Elemente die Fläche Σ' mit den Koordinaten Ξ^0, H^0, Z^0:

$$\begin{array}{cccccccc} X^0 & Y^0 & Z^0 & \Xi^0 & H^0 & Z^0 & 1 \\ x & y & z & \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} & \Sigma x \bar{x} \end{array}.$$

§ 7.

Die 12 Flächen für die abwickelbaren Flächen.

Es ſei nun das Syſtem der 12 Flächen entwickelt, wenn die Ausgangsfläche S abwickelbar iſt.

(I) Sind die Koordinaten der abwickelbaren Fläche wieder in der Form $x_i = V_i + uV'_i$, gegeben,

(II) ſo lauten nach den Entwicklungen des § 2 die Koordinaten der ihr durch Orthogonalität der Elemente entſprechenden Regelfläche $\bar{S}$

$$\bar{x} = W_1(v) - u\,\frac{\begin{vmatrix} 0 & V'_2 & V'_3 \\ F & V''_2 & V''_3 \\ F' & V'''_2 & V'''_3 \end{vmatrix}}{(V'\ V''\ V''')} = W_1 - u\,A_1,$$

$$\bar{y} = W_2(v) - u\,\frac{\begin{vmatrix} V'_1 & 0 & V'_3 \\ V''_1 & F & V''_3 \\ V'''_1 & F' & V'''_3 \end{vmatrix}}{(V'\ V''\ V''')} = W_2 - u\,A_2$$

$$\bar{z} = W_3(v) - u\,\frac{\begin{vmatrix} V'_1 & V'_2 & 0 \\ V''_1 & V''_2 & F \\ V'''_1 & V'''_2 & F' \end{vmatrix}}{(V'\ V''\ V''')} = W_3 - u\,A_3$$

(III) 1) Die zu S assoziierte Fläche ergibt sich nun, wenn man das Gleichungssystem $d\bar{x} \quad z_0\,dy - y_0\,dz$ usw. in die Differentiale nach u und v zerlegt. Die Gleichsetzung der mit du multiplizierten Ausdrücke in jeder der drei Gleichungen gibt:

$$\begin{aligned} -A_1 &= z_0 V'_2 - y_0 V'_3 \\ -A_2 &= x_0 V'_3 - z_0 V'_1 \\ -A_3 &= y_0 V'_1 - x_0 V'_2 \end{aligned}$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach zuerst mit V_1'', V_2'', V_3'', dann mit V_1''', V_2''', V_3''', so ergibt sich durch Addition mit Rücksicht auf die Relationen (II) des § 1 III

$$\begin{aligned} &\text{a)}\ F = x_0\,\varphi_1 + y_0\,\varphi_2 + z_0\,\varphi_3\ ^{1}) \\ &\text{b)}\ F' = x_0\,\varphi_1 + y_0\,\varphi_2 + z_0\,\varphi_3 \end{aligned}$$

[1]) Die im folgenden häufig vorkommenden Unterdeterminanten von $(V'\ V''\ V''')$ seien nach dem Schema abgekürzt:

$$(V'\ V''\ V''') \begin{cases} = V'_1\,\psi_1 + V'_2\,\psi_2 + V'_3\,\psi_3, \\ = -(V''_1\,\varphi'_1 + V'_2\,\varphi'_2 + V'_3\,\varphi'_3), \text{ sodaß } \begin{vmatrix} V'_2 & V'_2 \\ V'_2 & V'_3 \end{vmatrix} \varphi_1 \text{ usw.} \\ V'''_1\,\varphi_1 + V'''_2\,\varphi_2 + V'''_3\,\varphi_3, \end{cases}$$

Durch Gleichſetzung der Differentiale nach v erhält man

$$W'_1 - u A'_1 = z_0 (V'_2 + u V''_2) - y_0 (V'_3 + u V''_3)$$
$$= z_0 V'_2 - y_0 V'_3 + u (z_0 V''_2 - y_0 V''_3)$$
$$W'_1 - u A'_1 = - A_1 + u (z_0 V''_2 - y_0 V''_3)$$
$$W'_2 - u A'_2 = - A_2 + u (x_0 V''_3 - z_0 V''_1)$$
$$W'_3 - u A'_3 = - A_3 + u (y_0 V''_1 - x_0 V''_2)$$

Durch Multiplikation mit V'''_1, V'''_2, V'''_3 und Addition erhält man aus dieſen drei Gleichungen unter Berückſichtigung der in § 1 III angeführten Identitäten:

$$c) \quad - \frac{\Sigma W' V''' + F' - u \Sigma A' V'''}{u} = x_0 \psi_1 + y_0 \psi_2 + z_0 \psi_3.$$

Die Koordinaten von S_0 ſind alſo gegeben durch die in a_1, a_2, a_3 identiſche Gleichung

$$\Sigma a x_0 = \frac{1}{(\varphi \varphi' \psi)} \cdot \begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & F \\ \varphi'_1 & \varphi'_2 & \varphi'_3 & F' \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \Sigma A' V''' - \frac{\Sigma W' V''' + F'}{u} \end{vmatrix}$$

Durch Multiplikation mit $(V' V'' V''')$ ergibt ſich

$$\text{(III, 1)} \quad x_0 = \frac{1}{(V' V'' V''')^2} \cdot$$
$$\left[V'_1 \left(- \frac{\Sigma W' V'''}{u} - \frac{F'}{u} - \Sigma A' V''' \right) - F' V''_1 + F V'''_1 \right]$$

Für y_0 und z_0 erhält man entſprechende Ausdrücke in V'_2 beziehungsweiſe V'_3. Bildet man D'_0, ſo zeigt ſich, daß es null iſt; S_0 iſt alſo abwickelbar, was wegen des Parallelismus der Normalen ohnehin ſelbſtverſtändlich iſt.

Die der Rückkehrkante entſprechende Kurve $u = 0$ fällt ins Unendliche; die Erzeugenden ſind parallel denen von S.

Ist speziell die Rückkehrkante von S eine Schraubenlinie

$$V_1 = \cos v,\ V_2 = \sin v,\ V_3 = v,$$

so lauten die Koordinaten von S_0

$$x_0 = F' \cos v - \sin v \left(F'' - \frac{W'_3 + F'}{u}\right)$$

$$y_0 = F' \sin v + \cos v \left(F'' - \frac{W'_3 - F'}{u}\right)$$

$$z_0 = F + F'' - \frac{W'_3 - F'}{u}$$

Die Fläche ist auf ihre Rückkehrkante und deren Tangenten bezogen. Der Schraubenlinie selbst entspricht die neue Rückkehrkante

$$x_0 = F' \cos v - F'' \sin v,\quad y_0 = F' \sin v + F' \cos v,\quad z_0 = F + F''$$

durch Parallelismus der Tangenten.

Ist insbesondere $F = v$, so geht S_0 in S über[1]).

2. Ist nun die Fläche S ein Kegel mit den Koordinaten $x = uV_i$, so treten an Stelle der V_i'' die Funktionen V_i und unter W' und A' sind die in § 2 II entwickelten Funktionen zu verstehen.

Gleichung a) und b) bleiben dann unverändert; an Stelle von c) tritt

$$c') = \frac{\Sigma W' V''}{u} + \Sigma A' V'' = x_0 \psi_1 + y_0 \psi_2 + z_0 \psi_3 \text{ [2])}$$

Infolgedessen erhält man hier

$$\text{(III. 2)}\quad x_0 = \frac{1}{(V V' V'')^2}\left[V_1 \left(\Sigma A' V'' - \frac{\Sigma W' V''}{u}\right) - V_1'' F' + V_1'' F\right]$$

[1]) Nur wenn eine Fläche abwickelbar ist, kann sie zu sich selbst assoziiert sein, da für diesen Fall die Gleichung $D D''_0 + 2 D' D'_0 + D_0 D'' = 0$ übergeht in $D D'' - D'^2 = 0$.

[2]) x_0, y_0 und z_0 sind hier die Abkürzungen für die Unterdeterminanten von V_i'', $-V_i'$, V_i in der Determinante $(V V' V'')$.

und analoge Ausdrücke in V_2 und V_3 für y_0 und z_0. Die Erzeugenden dieſer abwickelbaren Fläche ſind denen des Kegels S parallel; der Spitze des Kegels entſprechen die unendlich fernen Punkte von S_0.

3. Iſt endlich S ein Zylinder mit den Koordinaten V_1, V_2, u, ſo ergibt die Zerlegung der Differentialgleichungen für S_0 nach du und dv direkt

$$\text{(III, 3)} \quad x_0 = -A_2,\ y_0 = A_1,\ z_0 = \frac{W'_1 - uA'_1}{V'_2} - \frac{W'_2 - uA'_2}{V'_1},$$

wo unter den Funktionen A und W die in § 11 entwickelten Ausdrücke zu verſtehen ſind. S_0 iſt alſo hier ein Zylinder.

(IV) 1. Durch Orthogonalität der Elemente entſpricht der mit (III, 1) bezeichneten abwickelbaren Fläche S_0 eine Regelfläche Σ_0 mit den Koordinaten ξ_0, η_0, ζ_0:

$$\text{(IV, 1)} \quad \xi_0 = W_1 - uA_1 - (V_1 + uV'_1)\,y_0 - (V_2 + uV'_2)\,z_0$$

$$W_1 \cdot \frac{1}{(V'V''V''')^2}\begin{bmatrix} V_2 & V_3 \\ V'_2 & V'_3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \Sigma W'V''' - F' & \Sigma A'V''' \\ u & \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} V_2 & V_3 \\ V'''_2 & V'''_3 \end{vmatrix} F - \begin{vmatrix} V_2 & V_3 \\ V''_2 & V''_3 \end{vmatrix} F' \Big],$$

analog lauten die Ausdrücke für η_0 und ζ_0.

2. Iſt aber die Ausgangsfläche S ein Kegel, ſo ſind an Stelle der Funktionen V'_i die Funktionen V_i zu ſetzen; die bei der allgemeinen abwickelbaren Fläche in (IV, 1) mit V_i multiplizierten Glieder fallen indes hier weg; es bleibt alſo nur

$$\text{(IV, 2)} \quad \xi_0 = W_1,\quad \eta_0 = W_2,\quad \zeta_0 = W_3,$$

das heißt Σ_0 wird in dem Syſtem der 12 Flächen für den Kegel eine Raumkurve.

3. Für den Zylinder als Ausgangsfläche ergeben ſich aus den Koordinaten (III, 3) die Koordinaten von Σ_0 unmittelbar als die einer Regelfläche mit Leitebene:

$$\text{(IV, 3)} \quad \xi_1 = W_1 - \frac{V_2}{V'_2} W'_1 + u \frac{V_2}{V'_2} A'_1$$

$$\eta_1 = W_2 - \frac{V_1}{V'_1} W'_2 + u \frac{V_1}{V'_1} A'_2$$

$$\zeta_0 = F - (A_1 V_1 + A_2 V_2).$$

(V, 1) Zu der Regelfläche S iſt aſſoziiert S_0. Die Beſtimmungsgleichungen $dx = z_1\, dy - y_1\, dz$ uſw. liefern durch Zerlegung in die Differentiale nach u und v wieder ſechs Gleichungen, nämlich erſtens das Syſtem

$$-V'_1 = \bar{z}_0 A_2 - \bar{y}_0 A_3$$
$$-V'_2 = \bar{x}_0 A_3 - \bar{z}_0 A_1$$
$$-V'_3 = \bar{y}_0 A_1 - \bar{x}_0 A_2,$$

aus dem ſich durch Multiplikation mit A'_1, A'_2, A'_3 und A''_1, A''_2, A''_3 und Addition unter Berückſichtigung der Relationen (II) in 2 III ergibt:

$$\text{a)} \quad -F = \bar{x}_0\, a_1 + \bar{y}_0\, a_2 + \bar{z}_0\, a_3 \text{[1]}$$
$$\text{b)} \quad -F' = \bar{x}_0\, a'_1 + \bar{y}_0\, a'_1 + \bar{z}_0\, a'_3,$$

ferner das Syſtem

$$V''_1 + u V'''_1 = \bar{z}_0 (W'_2 - u A'_3) - \bar{y}_0 (W'_3 - u A'_3)$$
$$V''_2 + u V'''_2 = \bar{x}_0 (W'_3 - u A'_3) - \bar{z}_0 (W'_1 - u A'_1)$$
$$V''_3 + u V'''_3 = \bar{y}_0 (W'_1 - u A'_1) - \bar{x}_0 (W'_2 - u A'_2);$$

[1] Es bedeuten a_i die Unterdeterminanten von A''_i in der Determinante $(A\, A'\, A'')$, γ_i die Unterdeterminanten von a, b, c in $(a\, W'\, A')$.

multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit A'_1, A'_2, A'_3, so erhält man

$$c)\quad F \quad \bar{x}\,\gamma_1 \quad \bar{y}\,\gamma_2 \quad \bar{z}\,\gamma_3$$

Aus a) b) c) ergibt sich sofort, daß S_1 eine Raumkurve ist mit den Koordinaten

$$(V,1)\quad \Sigma\, a\, \bar{x}_0 = \frac{1}{(a\,a'\,\gamma)} \begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & F \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & F' \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & F \end{vmatrix}$$

Bildet man $\Sigma\, V''\, \bar{x}$ und $\Sigma\, V''\, \bar{x}_0$, so zeigt sich, wenn man mit $(A\,A'\,A'')$ multipliziert, daß beide Summen $= 0$ sind, das heißt, der Radiusvektor von S_1 ist parallel zur Normalen von S.

2. Für den Fall, daß S ein Kegel, ergibt sich auf genau die gleiche Weise

$$(V,2)\quad \Sigma\, a\, \bar{x}_1 = \frac{1}{(a\,a'\,\gamma)} \begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & F \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & F' \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 \end{vmatrix}$$

Hier sind $\Sigma\, V\, x_1$ und $\Sigma\, V'\, x_0 = 0$ der Radiusvektor also parallel der Kegelnormale.

3. Ist S ein Zylinder, so ergibt sich das Resultat wieder durch die Zerlegung der Bestimmungsgleichungen in die mit du und dv multiplizierten Glieder unmittelbar:

$$(V,3)\quad \bar{x}_0 = \frac{V'_2}{F'}, \quad \bar{y}_0 = -\frac{V'_1}{F'}, \quad \bar{z}_0 = 0.$$

Wir erhalten also für diesen Fall eine ebene Kurve.

Es ergibt ſich alſo der Satz:

Die zu einer Regelfläche aſſoziierte Fläche reduziert ſich auf eine Kurve, wenn der Regelfläche durch Orthogonalität der Elemente eine abwickelbare Fläche zugeordnet iſt.

Dies ergibt ſich auch aus der in § 1 unter II angeführten Methode. Entſpricht nämlich der Regelfläche eine abwickelbare Fläche durch Orthogonalität der Elemente, bleiben alſo die Erzeugenden der Regelfläche v = conſt. bei der infinitesimalen Deformation geradlinig, ſo iſt ſowohl $D = 0$, alſo auch $D + \delta D = D + \epsilon d = 0$, alſo auch $d = 0$. Dann folgt aus der durch Variation der Gaußiſchen Gleichung entſtandenen Gleichung (ſiehe S. 9)

$$D'' d - 2 D' d' + D d'' = 0,$$

daß auch $d' = 0$ iſt. Nun lauten nach dieſer Methode die Koordinaten der aſſoziierten Fläche, gegeben durch ihre partiellen Differentialquotienten

$$x_{0u} = \frac{d'}{\sqrt{EG - F^2}} x_u - \frac{d}{\sqrt{EG - F^2}} x_v$$

$$x_{0v} = \frac{d''}{\sqrt{EG - F^2}} x_u - \frac{d'}{\sqrt{EG - F^2}} x_v$$

Iſt $d = d' = 0$, ſo verſchwinden die nach u genommenen Differentialquotienten von x_0, y_0, z_0, dieſe Koordinaten ſind alſo nur von v abhängig, ſtellen alſo eine Kurve dar.

Dasſelbe Reſultat erhalten wir auch aus folgender Überlegung: Entſpricht einer auf ihre Erzeugenden bezogenen Regelfläche S durch Orthogonalität der Elemente eine abwickelbare Fläche $\bar{S}$, ſo iſt $D = 0$, $\bar{D} = 0$ und $\bar{D}' = 0$. Aus den drei im vorigen Paragraphen angeführten Gleichungen zwiſchen den Koëffizienten der zweiten Grundformen von S, $\bar{S}$ und S_0 ergibt ſich dann $D_0 = 0$, $D'_0 = 0$. Die zur Regelfläche aſſoziierte Fläche wäre alſo abwickelbar, was wegen des Parallelismus der Nor-

malen ausgeſchloſſen iſt, da die Normalen einer Regelfläche längs einer Erzeugenden nicht wie die einer abwickelbaren Fläche unter ſich parallel ſind.

Die Normalen der Regelfläche $\bar{S}$ längs einer Erzeugenden entſprechen alſo durch Parallelismus den Normalen der Kurve $\bar{S}_v$ in dem entſprechenden Punkt v conſt. Daraus folgt alſo — was ſich auch durch eine einfache Rechnung beſtätigen ließe —:

Die Tangenten der Kurve $\bar{S}_0$ ſind parallel zu den Erzeugenden der Regelfläche $\bar{S}$.

(VI) Der Raumkurve $\bar{S}$ entſpricht durch Orthogonalität der Elemente wieder eine Raumkurve $\bar{\Sigma}_v$, wie viel ohne weiteres aus dem Anſatz $d\bar{\xi}_v = \bar{z}\, d\bar{y}_v - \bar{y}\, d\bar{z}_v$, alſo $\bar{\xi}_{ou} = 0$ uſw. ergibt.

Die folgenden Flächen nun laſſen ſich algebraiſch berechnen.

(VII) und (VIII) 1. Zur Regelfläche Σ_v ergibt ſich als aſſoziiert S_{00} mit den Koordinaten

$$\frac{X_0^i}{\bar{x}_0^i} = \frac{1}{\Sigma\, x\, \bar{x}_0} = \frac{1}{\Sigma\, V\, \bar{x}_0}$$

Da die Koordinaten x_v^i nur von v abhängen, iſt alſo auch S_{00} eine Raumkurve, wie auch aus der allgemeinen Überlegung der letzten Seite hervorgeht.

Durch Orthogonalität der Elemente iſt ihr wieder eine Raumkurve Σ_{00} zugeordnet, wie ſich unmittelbar aus der Darſtellung der Koordinaten

$$\frac{\Xi_0^i}{\bar{\xi}_0^i} = \frac{1}{\Sigma\, V\, \bar{x}_0}$$

ergibt.

2. Für den Kegel verſchwindet nun $\Sigma\, x\, \bar{x}_0 = u\, \Sigma\, V\, \bar{x}_0$, die Kurven S_{00} und Σ_{00} fallen alſo ins Unendliche.

3. Dagegen erhalten wir beim Zylinder, wie die direkte Berechnung ergibt,

$$X_0 = \frac{-\bar{x}_0}{\Sigma\, x\, \bar{x}_0} = -\frac{V'_2}{\begin{vmatrix} V_1 & V_2 \\ V'_1 & V'_2 \end{vmatrix}},\quad Y_0 = \frac{V'_1}{\begin{vmatrix} V_1 & V_2 \\ V'_1 & V'_2 \end{vmatrix}},\quad Z_0 = 0;$$

S_{00} ist also hier eine ebene Kurve, durch Orthogonalität der Elemente entspricht ihr eine Raumkurve Σ_{00}.

Die Tangenten von S_{00} sind wieder parallel den Erzeugenden von Σ, die Radiusvektoren von S_{00} sind parallel den Normalen von S, also auch den Normalen von S und den Radiusvektoren von $\overline{S}_0$.

(IX) und (X) 1. Die Koordinaten der zur Raumkurve Σ_0 assoziierten Fläche S_{00} lauten:

$$\overline{X}_0 = \frac{V'_1\left(\Sigma A' V''' - \frac{F' + \Sigma W' V'''}{u}\right) - V''_1 F' + V'''_1 F}{\Sigma (W - u A) \cdot \left[V'\left(\Sigma A' V''' - \frac{F' + \Sigma W' V'''}{u}\right) - V'' F' + V''' F\right]}$$

oder, da $\Sigma A x_0 = 0$,

$$\overline{X}_0 = - \frac{V'_1\left(\Sigma A' V''' - \frac{F' + \Sigma W' V'''}{u}\right) - V''_1 F' + V'''_0 F}{\left(\Sigma A' V''' - \frac{F' + \Sigma W' V'''}{u}\right) \cdot \Sigma W V' - F' \Sigma W V'' + F \Sigma W V'''}$$

Durch Vertauschung des Index 1 von V', V'', V''' mit 2 und 3 erhält man wieder die Koordinaten von $\overline{Y}_0$ und $\overline{Z}_0$. Bezeichnet man den Nenner des Bruchs mit N, so ergibt sich für die Koordinaten der Fläche $\overline{\Sigma}_{00}$

$$\overline{\Xi}_0 = - \frac{1}{N} \left\{ (V' V'' V''')^2 W_1 - \begin{vmatrix} V_2 & V_3 \\ V'_2 & V'_3 \end{vmatrix} \left(\Sigma A' V''' - \frac{F' + \Sigma W' V'''}{u}\right) + \begin{vmatrix} V_2 & V_3 \\ V''_2 & V''_3 \end{vmatrix} F' - \begin{vmatrix} V_2 & V_3 \\ V'''_2 & V'''_3 \end{vmatrix} F \right\}$$

Um entscheiden zu können, welche der beiden durch Orthogonalität der Elemente sich entsprechenden Flächen, abwickelbar und welche Regelfläche ist, stellen wir die Bedingung auf, unter welcher eine Fläche, deren Koordinaten lineare gebrochene Funktionen von u sind, abwickelbar ist. Sind die Koordinaten

$x_i = \frac{a_i + u\,b_i}{A + u\,B}$, unter a_i, b_i, A, B Funktionen von v verſtanden, ſo kann man ſie auch in der Form

$$x_i = \frac{b_i}{B} + \frac{a_i B - b_i A}{B\,(u B + A)} = \alpha_i + \frac{\beta_i}{B\,(u B + A)}$$

ſchreiben, wenn man für $\frac{b_i}{B}$ α_i, für $a_i B - b_i A$ β_i ſetzt. Die Bedingung der Abwickelbarkeit lautet nun

$$D' = 0 = (\beta' \alpha' \beta).$$

Setzt man jetzt für α_i und β_i die obigen Werte wieder ein, ſo erhält man

$$(a'\,b'\,a)\,B - (a'\,b'\,b)\,A - (a'\,b\,a)\,B' - (b\,b'\,a)\,A' = 0$$

Iſt ſpeziell $b_i = c\,a'_i$, ſo muß $B = A'$ ſein, für $b_1 = b_2 = 0$ muß $b_3 = c \cdot B$ ſein.

Die Anwendung der entwickelten Bedingung zeigt, daß S_{00} eine Regelfläche, Σ_{00} eine abwickelbare Fläche iſt.

Dasſelbe Reſultat erhalten wir, wenn die Ausgangsfläche ein Kegel oder Zylinder iſt; ſpeziell wird für den Kegel Σ_{00} ebenfalls ein Kegel, da hier $\xi_0^1 = W_i$.

(XI) und (XII) 1. Die zur Raumkurve Σ_{00} aſſoziierte Fläche S^0 und die Fläche Σ^0, welche ihr durch Orthogonalität der Elemente zugeordnet iſt, ſind gegeben durch folgende Darſtellung ihrer Koordinaten X^0, Y^0, Z^0 beziehungsweiſe Ξ^0, H^0, Z^0:

$$\frac{X_i^0}{x_i} = \frac{\Xi_i^0}{\bar{x}_i} = \frac{1}{\Sigma\,x\,\bar{x}} = \frac{1}{\Sigma\,V\,W + u\,(\Sigma\,V'\,W - \Sigma\,V\,A)}$$

Aus der Anwendung des oben entwickelten Kriteriums ergibt ſich, daß S^0 die Regelfläche, Σ^0 die abwickelbare Fläche iſt.

2. Sind ſpeziell die Koordinaten x_i die eines Kegels $x_i = u\,V_i$, ſo wird $\Sigma\,x\,\bar{x} = u\,\Sigma\,V\,W$; für S^0 ergibt ſich alſo eine

Raumkurve mit den Koordinaten $X_i^0 = -\frac{V_i}{\Sigma \bar{V} \bar{W}}$, der durch Orthogonalität der Elemente eine abwickelbare Fläche mit den Koordinaten $\Xi_i^0 = -\frac{W_i - u A_i}{u \Sigma \bar{V} \bar{W}}$ entſpricht.

3. Für den Zylinder dagegen erhält man dasſelbe Reſultat wie für die allgemeine abwickelbare Fläche.

Zuſammenfaſſung.

Das Syſtem der 12 Flächen enthält alſo, wenn die Ausgangsfläche eine allgemeine Developpable iſt,

4 Regelflächen ($\bar{S}$, Σ_0, $\bar{S}_{00}$ S^0),

4 abwickelbare Flächen (S, S_0, $\bar{\Sigma}_{00}$, Σ^0),

4 Kurven ($\bar{S}_0$, $\bar{\Sigma}_0$, S_{00}, Σ_{00})

Durch Orthogonalität der Elemente entſprechen

die abwickelbaren Flächen S S_0 $\bar{\Sigma}_{00}$ Σ^0

der Reihe nach den Regelflächen $\bar{S}$ Σ_0 $\bar{S}_{00}$ S^0

und die Kurven $\bar{S}_0$ und S_{00}

den Kurven $\bar{\Sigma}_0$ beziehungsweiſe Σ_{00}.

Aſſoziiert ſind

die Regelflächen $\bar{S}$ Σ_0 $\bar{S}_{00}$ S^0

und die Kurven $\bar{S}_0$ S_{00} $\bar{\Sigma}_0$ Σ_{00},

die abwickelbaren Flächen S und S_0, ſowie $\bar{\Sigma}_{00}$ und Σ^0,

Als reziproke Polarflächen entſprechen

den abwickelbaren Flächen S S_0 $\bar{\Sigma}_{00}$ Σ^0

die Kurven S_{00} $\bar{S}_0$ Σ_{00} $\bar{\Sigma}_0$,

den Regelflächen $\bar{S}$ und Σ_0

die Regelflächen $\bar{S}_{00}$ beziehungsweiſe S^0.

Endlich ſind als Brennflächenmäntel eines W-Strahlenſyſtems einander zugeordnet:

die abwickelbaren Flächen S S_0 $\bar{\Sigma}_{00}$ Σ^0

und die Kurven $\bar{\Sigma}_0$ Σ_{00} $\bar{S}$ S_{00},

die Regelflächen $\bar{S}$ und Σ_0, ſowie $\bar{S}_{00}$ und S^0.

Iſt S ein Kegel, ſo fallen S_{00} und Σ_{00} ins Unendliche, Σ_0 und S^0 werden Raumkurven.

Iſt S ein Zylinder, ſo unterſcheidet ſich das Reſultat von dem der allgemeinen abwickelbaren Fläche nur dadurch, daß an Stelle der allgemeinen Developpabeln S_0 ein Zylinder, an Stelle der allgemeinen Regelflächen $\bar{S}$ und Σ_0 Regelflächen mit Leitebene und an Stelle der Raumkurven $\bar{S}_0$ und S_{00} ebene Kurven treten.

Die Sätze in § 6 über Haupttangentenkurven werden für die abwickelbaren Flächen und die Kurven natürlich gegenſtandslos.

Dagegen entſprechen ſich auf den Regelflächen $\bar{S}$, Σ_0, S^0, $\bar{S}_{00}$ die konjugierten Syſteme und Haupttangentenkurven.

Iſt alſo $\bar{S}$ auf ſeine Haupttangentenkurven bezogen, was man durch geeignete Wahl der willkürlichen Funktionen F und W ſtets bewirken kann, ſo ſind die Regelflächen Σ_0, S^0 und $\bar{S}_{00}$ von ſelbſt auf ihre Haupttangentenkurven bezogen.

An dieſe Betrachtung der 12 Flächen wollen wir noch eine Unterſuchung der Ribaucourſchen Strahlenſyſteme anſchließen, welche zu abwickelbaren Flächen gehören. Bezeichnet $d\bar{s}$ ein Längenelement $\bar{S}$, ſind X, Y, Z beziehungsweiſe $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$ die Richtungskoſinus zweier unendlich naher Strahlen, die von den Endpunkten von $d\bar{s}$ ausgehen, und bedeuten r beziehungsweiſe $r + \partial r$ die Entfernungen, die der kürzeſte Abſtand dp derſelben von den Endpunkten von $d\bar{s}$ hat, ſo ergibt die Projektion des geſchloſſenen Vierſeits $(d\bar{s}, r, dp, r + \partial r)$ auf die Koordinatenachſen die in § 2 Seite 15 entwickelte Gleichung $\Sigma\, d\bar{x}\, dX + r\, \Sigma\, dX^2 = 0$. Die Richtungskoſinus der Strahlen ſind gleich denen der Normalen der abwickelbaren Fläche

$$\Sigma\, a\, X = \rho\, (a\, V'\, V'')$$

Wir erhalten daher

$$dv^2 \left[(W' - u\,A', V', V'')\,\rho' + (W' - u\,A', V', V''')\,\rho\right]$$
$$- du\,dv \left[(A\,V'\,V'')\,\rho' + (A\,V'\,V''')\,\rho\right] + r\,dv^2\,\Sigma X'^2 = 0.$$

Für $dv = 0$, $v = \text{const.}$ iſt r unbeſtimmt; das iſt ſelbſtverſtändlich, da längs der Erzeugenden die Strahlen parallel ſind.

Seţt man $\frac{dv}{du} = z$, ſo erhält man

$$z \left[(W' - u\,A', V', V'')\,\rho' + (W' - u\,A', V', V''')\,\rho\right]$$
$$- \left[(A\,V'\,V'')\,\rho' + (A\,V'\,V''')\,\rho\right] + r\,z\,\Sigma X'^2 = 0;$$

die im allgemeinen Fall in z quadratiſche Gleichung reduziert ſich alſo auf eine in z lineare Gleichung. Aus ihr ergibt ſich für das Maximum oder Minimum von r

$$r\,\Sigma X'^2 + \left[(W'\,u\,A', V', V'')\,\rho' + (W' - u\,A', V', V''')\,\rho\right] = 0$$

Seţt man für ρ ſeinen Wert $\frac{1}{\sqrt{\begin{vmatrix} \Sigma V'^2 & \Sigma V'\,V'' \\ \Sigma V'\,V'' & \Sigma V''^2 \end{vmatrix}}}$ oder, wenn man der einfachen Rechnung halber $\Sigma V'^2 = 1$ wählt, $\frac{1}{\sqrt{\Sigma V''^2}}$ ein, ſo erhalten wir durch Multiplikation mit $(V'\ V''\ V''')$ unter Berückſichtigung der in § 1 III angeführten Identitäten (II)

$$(A'\ V''\ V''')\ \rho' + (A'\ V'\ V''')\ \rho = 0.$$

r hängt alſo nur von v ab und hat den Wert:

$$r = -\frac{(W'\ V'\ V'')\,\rho' + (W'\ V'\ V''')\,\rho}{\Sigma X'^2}$$

Iſt nun S ein Kegel, ſo treten wieder an Stelle der V'_i die Funktionen V_i; r ergibt ſich hier aus der Gleichung

$$r\,\Sigma X'^2 + \left[(W' - u\,A', V, V')\ \rho' + (W' - u\,A', V, V'')\ \rho\right] = 0,$$

in der ρ $\begin{vmatrix} 1 & \\ \Sigma V^2 & \Sigma V V' \\ \Sigma V V' & \Sigma V'^2 \end{vmatrix}$ oder $\begin{vmatrix} 1 & \\ \Sigma V'^2 & \end{vmatrix}$ iſt, wenn $\Sigma V^2 = 1$ geſetzt wird. Multipliziert man nun hier mit $(V'\ V''\ V'''\ V'''')$ und berückſichtigt die Relationen (I′) und (II) in § 1 II, ſo ergibt ſich, daß der ganze Ausdruck in der eckigen Klammer verſchwindet; alſo muß hier $r = 0$ ſein.

Dasſelbe Reſultat erhalten wir, wenn S ein Zylinder iſt.

Es gilt alſo der Satz:

Für das zu einer infinitesimalen Deformation einer abwickelbaren Fläche gehörige Ribaucourſche Strahlenſyſtem fallen die beiden Grenzflächen in eine Fläche zuſammen; dieſe iſt eine Regelfläche und zwar für die ſpeziellen Fälle, daß die Ausgangsfläche S ein Kegel oder Zylinder iſt, die Fläche $\bar{S}$ ſelbſt.

Die Richtungskoſinus a, b, c des kürzeſten Abſtand zweier benachbarter Strahlen ergeben ſich aus

$$\Sigma X a = 0,\ \Sigma d X a = 0$$

oder

$$(a\ V'\ V'') = 0,\ (a\ V'\ V''') = 0.$$

Iſt S ein Zylinder, alſo $Z = 0$, ſo erhält man hier

$$a = b = 0, \text{ das heißt:}$$

Iſt die Ausgangsfläche eines Ribaucourſchen Strahlenſyſtems ein Zylinder, ſo iſt die Richtung der kürzeſten Abſtände der Strahlen parallel zur Z-Achſe.

Die Projektion des Vierſeits $(d\bar{s},\ r,\ dp,\ r + \partial r)$ auf die Koordinatenachſen liefert nun bekanntlich auch die Gleichung für den kürzeſten Abſtand

$$dp = \Sigma a\, d\bar{x}.$$

Soll $dp = 0$ werden, so müssen also die drei Gleichungen

$$\Sigma\, a\, d\bar{x} = 0, \quad \Sigma\, X\, d\bar{x} = 0, \quad \Sigma\, X'\, d\bar{x} = 0$$

erfüllt sein, es muß also die Determinante $(d\bar{x}, X, X')$ verschwinden. Die Multiplikation derselben mit $(V'\ V''\ V''')$ zeigt, daß dies für $dv = 0$ der Fall ist, also für die Strahlen längs einer Erzeugenden, die parallel sind. Die Brennflächen dieses Ribaucourschen Strahlensystems fallen also ins Unendliche.

§ 8.

Die 12 Flächen für die Minimalschraubenregelfläche.

Es ließen sich nun auch für die Regelfläche die 12 Flächen entwickeln, indem man zum Beispiel von Methode I b ausginge; doch würde man bald zu sehr komplizierten Ausdrücken kommen. Es sei daher nur für eine spezielle Regelfläche, die Minimalschraubenfläche, das System der 12 Flächen entwickelt. Die infinitesimale Deformation dieser Fläche läßt sich durch alle in § 1 angegebenen Methoden bestimmen, doch erweist sich die Darbouxsche unter I b Seite 7 angeführte Methode hier als die einfachste und zweckmäßigste.

Gehen wir aus von der Laplaceschen Gleichung

$$\Im_{uv} = 0,$$

deren allgemeine Lösung $\omega = U(u) + V(v)$ ist und wählen wir als partikuläre Integrale die Koordinaten eines Kreiszylinders

$$\Im_1 = \sin v, \quad \Im_2 = \cos v, \quad \Im_3 = u,$$

so liefern die Lelieuvreschen Formeln

$$(I) \quad x = u \cos v, \quad y = -u \sin v, \quad z = v,$$

also die Koordinaten einer Minimalschraubenfläche. Die Fläche

$\bar{S}$, die ihr durch Orthogonalität der Elemente entſpricht, hat dann die Koordinaten

$$\bar{x} = \int U' \sin v \, du - \begin{vmatrix} \sin v & U + V \\ \cos v & V' \end{vmatrix} dv$$

$$\bar{y} = \int U' \cos v \, du - \begin{vmatrix} \cos v & U + V \\ -\sin v & V' \end{vmatrix} dv$$

$$\bar{z} = \int \begin{vmatrix} u & U + V \\ 1 & U' \end{vmatrix} du - u V' dv$$

oder

$$\bar{x} = (U + V) \sin v - 2 \int V' \sin v \, dv$$

$$\text{(II)} \quad \bar{y} = (U + V) \cos v - 2 \int V' \cos v \, dv$$

$$\bar{z} = -u (U + V) + 2 \int u U' du$$

Die Fläche iſt auf ein konjugiertes Syſtem bezogen. Den Geraden v = const. entſprechen ebene Kurven, den Schraubenlinien u = const. entſprechen die Kurven:

$$\bar{x} = (c + V) \sin v - 2 \int V' \sin v \, dv$$

$$\bar{y} = (c + V) \cos v - 2 \int V' \cos v \, dv$$

$$\bar{z} = c_1 (c + V) + c_2$$ [1])

$U = 0$, $V = 1$ gibt gerade den Kreiszylinder.[2])

Die Fläche $\bar{S}$ fällt in dieſem Fall mit der Fläche mit den Koordinaten Θ zuſammen.

Die Koordinaten der zur Schraubenfläche aſſoziierten Fläche S_0 ergeben ſich wieder durch Zerlegung des Gleichungs-

[1]) Man vergleiche die allgemeineren Reſultate Seite 25.
[2]) Vergleiche Seite 18.

ſyſtems $dx = z_0\,dy - y_0\,dz$ uſw. in die mit du beziehungsweiſe dv multiplizierten Glieder; wir erhalten:

$$\begin{aligned} x_0 &= -V'\cos v - (U+V)\sin v + U'u\sin v \\ &= -V'\cos v - V\sin v + (U'u - U)\sin v \\ y_0 &= V'\sin v - (U+V)\cos v + U'u\cos v \\ &= V'\sin v - V\cos v + (U'u - U)\cos v \\ z_0 &= -U'. \end{aligned}$$

Die Parameterkurven bilden hier ein Syſtem von Krümmungslinien; die Kurven u = const. liegen in Parallelebenen zur xy-Ebene, die Kurven v = const. in dazu ſenkrechten Ebenen. Den Schraubenlinien auf S entſprechen alſo durch Parallelismus der Normalen die Kurven

$$\begin{aligned} x_0 &= -V'\cos v - (V+c)\sin v \\ y_0 &= V'\sin v - (V+c)\cos v \end{aligned}$$

Dieſe Kurven entſprechen der Schraubenlinie zugleich durch Orthogonalität der Elemente[1]). Für $U = k$ oder $= k\cdot u$ wird S_0 eine ebene Kurve, die aus der zuletzt genannten hervorgeht, wenn $c = 0$ beziehungsweiſe $= k$ geſetzt wird.

Zu $\bar{S}$ iſt aſſoziiert die Fläche $\bar{S}_0$ mit den Koordinaten

$$\text{(IV)}\quad \bar{x}_0 = \frac{\sin v}{U+V},\quad \bar{y}_0 = \frac{\cos v}{U+V},\quad \bar{z}_0 = \frac{u}{U+V}$$

Dem konjugierten Syſtem der Parameterkurven auf $\bar{S}$ entſpricht auf $\bar{S}_0$ wieder ein konjugiertes Syſtem.

Die Minimalflächen ſind nun, wie ſchon erwähnt, außer den abwickelbaren Flächen die einzigen Flächen, für welche die charakteriſtiſche Funktion konſtant ſein kann, wie aus der Weingartenſchen Gleichung unmittelbar folgt. Bildet man für

[1]) Vergleiche die weſentlich verſchiedenen Kurven, die der Schraubenlinie durch Parallelismus der Tangenten entſprechen, S. 48.

dieſen Fall die Koëffizienten des Längenelements von $\bar{S}$, ſo zeigt ſich (nach Methode I a), daß ſie den Koëffizienten der erſten Grundform von S gleich ſind: $\bar{E} = E$, $\bar{F} = F$, $\bar{G} = G$. Setzen wir in unſerem Fall die charakteriſtiſche Funktion φ gleich einer Konſtanten, ſo finden wir an dem Beiſpiel der Minimalſchraubenfläche den folgenden Satz beſtätigt: Sind zwei Flächen auf einander abwickelbar und entſprechen ſie ſich zugleich durch Orthogonalität der Elemente, ſo ſind ſie adjungierte und gleichzeitig in unſerem Sinn aſſoziierte Minimalflächen[1]).

Damit die aus der Weingartenſchen Gleichung beſtimmte charakteriſtiſche Funktion für die Minimalſchraubenfläche

$$\varphi = \frac{U + V}{\sqrt{1 + u^2}}$$

konſtant wird, hat man zu ſetzen

$$V = c, \quad U = c + c_1 \sqrt{1 + u^2}$$

Die der Schraubenfläche durch Orthogonalität der Elemente entſprechende Fläche wird für $c_1 = 1$

$$\bar{x} = \sqrt{1 + u^2} \sin v$$

$$\bar{y} = \sqrt{1 + u^2} \cos v$$

$$\bar{z} = -\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = -\lg (u + \sqrt{1 + u^2}).$$

In der Tat wird hier $\bar{E} = E = 1$, $\bar{F} = F = 0$, $\bar{G} = G = 1 + u^2$; gleichzeitig iſt $\bar{S}$ aſſoziert zu S, wobei in den Koordinaten der allgemeinen aſſoziierten Fläche S_0 zu ſetzen iſt

$$V = 0, \quad U = -\sqrt{1 + u^2} + u \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}}$$

[1]) Bianchi, Differential-Geometrie, Seite 367, Darboux, Théorie des surfaces, Band IV, Seite 323, O. Bonnet, „Note sur la théorie génerale des surfaces", Comptes rendus, Band 37, Seite 529. Von den abwickelbaren Flächen iſt hier wieder abgeſehen.

Für $\varphi = c$ entſpricht alſo der Minimalſchraubenfläche durch Orthogonalität der Elemente eine auf ihr abwickelbare und zu ihr aſſoziierte Minimalfläche, das Catenoid. Den Haupttangentenkurven der Minimalſchraubenfläche entſprechen die Krümmungslinien des Catenoids.

Der Kehlkreis von $\bar{S}$ entſpricht der Z-Achſe.

Die Flächen S_0 und $\bar{S}_0$, zwei reziproke Polarflächen, auf denen ſich konjugierte Syſteme und Haupttangentenkurven entſprechen, werden für φ const. Kugeln, die auf Parallel- und Meridiankreiſe bezogen ſind.

Die übrigen acht Flächen ſeien nun für den eben beſprochenen Fall $\varphi = 1$ weiter entwickelt.

Die der Kugel S_0 durch Orthogonalität der Elemente entſprechende Fläche Σ_0 hat dann die Koordinaten

$$(V)\quad \xi_0 = \sqrt{1+u^2}\sin v - u\sin v\cdot\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} - v\frac{\cos v}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{\sin v - v\cos v}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\eta_0 = \sqrt{1+u^2}\cos v + v\cdot\frac{\sin v}{\sqrt{1+u^2}} - u\cos v\cdot\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{\cos v + v\sin v}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\zeta_0 = -\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} + u\frac{\cos^2 v}{\sqrt{1+u^2}} + u\frac{\sin^2 v}{\sqrt{1+u^2}} - \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} - \int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$

Das ſind die Koordinaten der auf ein konjugiertes Syſtem bezogenen Mittelfläche des von der Kugel S_0 ausgehenden Ribaucourſchen iſotropen Strahlenſyſtems.

Die Fläche Σ_0 iſt ferner der eine Brennflächenmantel eines W-Strahlenſyſtems, deſſen anderer Brennflächenmantel $\bar{S}$ iſt; die

konjugierten Syſteme und Haupttangentenkurven auf ihnen entſprechen ſich.

Der Kugel $\overline{S}_0$ entſpricht durch Orthogonalität der Elemente eine auf ihre Haupttangentenkurven bezogene Minimalſchraubenfläche $\overline{\Sigma}_0$:

$$\text{(VI)}\quad \overline{\xi}_0 = -\,u\cos v + 2\cos v \int \frac{u^2\,du}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\overline{\eta}_0 = u\sin v - 2\sin v \int \frac{u^2\,du}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\overline{\zeta}_0 = v$$

$\overline{\Sigma}_0$ iſt der eine Mantel einer Brennfläche, deren anderer die ebenfalls auf ihre Haupttangentenkurven bezogene Minimalſchraubenfläche S iſt.

Aſſoziiert zu Σ_0 iſt S_{00} mit den Koordinaten

$$\frac{X_0^i}{\overline{x}_0^i} = \frac{1}{\Sigma\, x\, \overline{x}_0} = -\frac{\sqrt{1+u^2}}{u\cdot v}$$

ſomit

$$\text{(VII)}\quad X_0 = \frac{\sin v}{u\cdot v},\ Y_0 = -\frac{\cos v}{u\cdot v},\ Z_0 = \frac{1}{v}$$

Das ſind die Koordinaten eines auf ſeine Haupttangentenkurven bezogenen Conoids, der reziproken Polarfläche zu S; die konjugierten Syſteme und Haupttangentenkurven auf S und S_{00} entſprechen ſich.

Dieſem Conoid iſt durch Rechtwinkligkeit der Elemente zugeordnet Σ_{00} mit den Koordinaten

$$\Xi_0 = \frac{\cos v}{v}\left(\frac{2\sqrt{1+u^2}}{u} - \int \frac{u^2\,du}{\sqrt{1+u^2}} - \sqrt{1+u^2}\right)$$

$$\text{(VIII)}\quad H_0 = \frac{\sin v}{v}\left(\frac{2\sqrt{1+u^2}}{u} - \int \frac{u^2\,du}{\sqrt{1+u^2}} - \sqrt{1+u^2}\right)$$

$$Z_0 = \frac{\sqrt{1+u^2}}{u}$$

Die Fläche ist auf ein konjugiertes System von ebenen Parameterkurven bezogen; sie bildet mit der Kugel S_0 die Brennfläche eines W-Strahlensystems.

Zu $\bar{\Sigma}_0$ ist assoziiert $\bar{S}_{00}$ mit den Koordinaten

$$\frac{\bar{X}_0^i}{x_0^i} = -\frac{1}{\Sigma \bar{x} x_0} = -\frac{1}{\dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}} \int \dfrac{du}{\sqrt{1+u^2}} - 1} = -\frac{1}{N}$$

$$\text{(IX)}\quad \bar{X}_0 = \frac{\sin v}{N\sqrt{1+u^2}},\quad \bar{Y}_0 = \frac{\cos v}{N\sqrt{1+u^2}},\quad \bar{Z}_0 = \frac{u}{N\sqrt{1+u^2}},$$

also eine auf ihre Krümmungslinien bezogene Rotationsfläche, die reziproke Polarfläche zu $\bar{S}$; die Krümmungslinien beider Flächen entsprechen sich, sie sind in beiden Fällen die Parameterkurven.

Der Fläche $\bar{S}_{00}$ ist durch Orthogonalität der Elemente die Fläche $\bar{\Sigma}_{00}$ zugeordnet:

$$\text{(X)}\quad \bar{\Xi}_0 = -\frac{\sin v - v \cos v}{N\sqrt{1+u^2}}$$

$$\bar{H}_0 = -\frac{\cos v + v \sin v}{N\sqrt{1+u^2}}$$

$$\bar{Z}_0 = \frac{\dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}} - \int \dfrac{du}{\sqrt{1+u^2}}}{N},$$

wo unter N wie oben $\dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}} \int \dfrac{du}{\sqrt{1+u^2}} - 1$ zu verstehen ist. Die Parameterkurven bilden ein konjugiertes System. Die zu $\bar{\Sigma}_{00}$ gehörige reziproke Polarfläche ist die natürlich ebenfalls auf ein konjugiertes System bezogene Fläche Σ_{00}. Als zweiter Brennflächenmantel des durch die infinitesimale Deformation von $\bar{\Sigma}_{00}$ entstehenden W-Strahlensystems entspricht der Fläche $\bar{\Sigma}_{00}$ die Kugel $\bar{S}_0$.

Endlich ist assoziiert zu Σ_{00} die Fläche S^0 mit den Koordinaten

$$\frac{X_i^0}{x_i} = -\frac{1}{\Sigma x \bar{x}} = \frac{1}{v\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}},$$

also

$$\text{(XI)}\quad X^0 = \frac{u\cos v}{v\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}},\quad Y^0 = -\frac{u\sin v}{v\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}},$$

$$Z^0 = \frac{1}{\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}}$$

Die ebenen Parameterlinien bilden wieder ein konjugiertes System. Die konjugierten Systeme und Haupttangentenkurven entsprechen wieder denen auf der zugehörigen und natürlich auch auf ein konjugiertes System bezogenen reziproken Polarfläche Σ_0, außerdem denen auf dem zugeordneten zweiten Brennflächenmantel $\bar{S}_{00}$.

Durch Orthogonalität der Elemente gehört zu dieser Fläche ein auf seine Haupttangentenkurven bezogene Conoid Σ^0 mit den Koordinaten

$$\Xi^0 = \frac{\sqrt{1+u^2}\sin v}{v\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}},\quad H^0 = \frac{\sqrt{1+u^2}\cos v}{v\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}},\quad Z^0 = -\frac{1}{v}$$

Den Haupttangentenkurven dieses Conoids Σ^0 entsprechen: auf der assoziierten Fläche $\bar{\Sigma}_{00}$ konjugierte Systeme, auf der reziproken Polarfläche $\bar{\Sigma}_0$, einer Minimalschraubenfläche, und auf dem zugehörigen zweiten Brennflächenmantel S_{00}, einem Conoid, wieder Haupttangentenkurven, außerdem entsprechen sich auch auf Σ^0, S_{00} und $\bar{\Sigma}_0$ die konjugierten Systeme.

Wir finden also an diesem Beispiel in einfacher Weise die allgemeinen Sätze über die 12 Flächen, wie sie in § 6 angeführt sind, bestätigt.

Lebenslauf

Ich bin geboren am 25. Januar 1887 in München, beſuchte von September 1897 bis Juli 1906 das hieſige Luitpoldgymnaſium und widmete mich dann an der Münchener Univerſität zunächſt allgemeinem philoſophiſchem Studium, hierauf der Mathematik und Phyſik. Aus dieſen Fächern legte ich im Jahre 1909 den erſten, im Jahre 1911 den zweiten Abſchnitt der Lehramtsprüfung ab. Den Herren Profeſſoren, deren Vorleſungen und Übungen ich beſuchte, insbeſondere den Herren Doehlemann, Graetz, Lindemann, Pringsheim, Röntgen, Sommerfeld, Voß, fühle ich mich für die empfangene Belehrung zu dauerndem Danke verpflichtet.